

С. В. Гадецька¹, В. Ю. Дубницький², Ю. І. Кушнерук³, О. І. Ходирев², І. А. Черепньов⁴

¹ Харківський національний автомобільно-дорожній університет, Харків, Україна

² ННІ «Каразінський банківський інститут» ХНУ імені В. Н. Каразіна, Харків, Україна

³ Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків, Україна

⁴ Державний біотехнологічний університет, Харків, Україна.

EXCEL-ОРІЄНТОВАНИЙ КАЛЬКУЛЯТОР ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ЗНАЧЕНЬ ДЕЯКИХ СПЕЦІАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ МАТЕМАТИЧНОЇ ТА ТЕОРЕТИЧНОЇ ФІЗИКИ

А н о т а ц і я . **Мета дослідження:** Розробка EXCEL-орієнтованого калькулятора для обчислення значень спеціальних функцій математичної і теоретичної фізики. **Об'єкт дослідження:** спеціальні функції математичної і теоретичної фізики. **Предмет дослідження:** чисельні методи набуття значень спеціальних функцій. **Отримані результати:** Запропоновано та реалізовано EXCEL-орієнтовані алгоритми обчислення найбільш поширених спеціальних функцій математичної і теоретичної фізики. Викладено способи адаптивного визначення кількості інтервалів при чисельному інтегруванні, які необхідні для досягнення прийнятної точності обчислень. Для невласних інтегралів запропоновано процедуру їх заміни на інтеграли з кінцевими межами, які забезпечують виконання обчислень із заданою точністю. Запропоновано процедури визначення кількості доданків для n -ої часткової суми функціонального ряду з нескінченною кількістю доданків, що забезпечує необхідну точність обчислень. Показано, що запропоновані алгоритми забезпечують точність обчислень не меншу, ніж пакет Mathcad. Запропоновано і реалізовано алгоритм обчислення значень функцій, що використовує многочлени Чебишева. Алгоритм дозволяє використовувати його для обчислення значень довільної безперервної функції, яка задана користувачем.

Ключові слова: методи обчислень; спеціальні функції; многочлени Чебишева.

Вступ

Задача обчислення значень елементарних функцій історично була однією з перших задач, розв'язаних на комп'ютерах [1–9]. Вона і до сьогоднішнього дня залишається актуальною, бо методи її розв'язання істотно залежать від безперервної зміни архітектури комп'ютерів [4, 5, 7, 9] і особливостей реалізації на них арифметичних операцій [5, 6, 10–13]. Наприклад, в роботі [5], яку було видано в 1963 р., для запропонованих алгоритмів обчислення функцій висувалася жорстка вимога економії пам'яті. У [12], одній з перших публікацій по даній темі, апаратні, арифметичні і алгоритмічні завдання, пов'язані з обчисленням функцій, розглянуті як єдине ціле. Такий підхід до опису розв'язання задач був виправданий тим, що кожен тип обчислювальних машин мав свою систему команд і свої особливості виконання арифметичних операцій. Загальноприйнята сьогодні двійкова система подання чисел була не обов'язковою для всіх обчислювальних машин, наприклад, обчислювальна машина «СЕТУНЬ» мала трійкову систему подання чисел [13].

Поява мов програмування високого рівня призвела до появи програмних продуктів, таких як Derive, Matlab, Mathcad, Maple, Mathematica, Scilab, здатних виконувати аналітичні перетворення формул. Це істотно спростило процес обчислення елементарних і спеціальних функцій. Перелік спеціальних функцій, які включено в ці пакети, не співпадає між собою, і їх зміст та угруповання за типами багато в чому суб'єктивний. В [3] спеціальні функції не розподілено на математичні і фізичні, в [2, 16] цей розподіл виконано. Такий поширений пакет, як MS Excel, містить практично весь перелік елементарних функцій, але із спеціальних функцій математичної фізики в пакет MS Excel включено лише обчислення

значень гамма-функції і функцій Бесселя. У пізнішій версії цього пакету введено обчислення значень гамма-функції. Методи обчислення значень елементарних і спеціальних функцій, використаних в кожному з цих пакетів, користувачеві невідомі і недоступні. Порівняння результатів обчислення значень деяких функцій, виконаних із застосуванням різних пакетів, показано в табл. 1.

Таблиця 1 – Порівняння результатів обчислення чисельних значень деяких елементарних, спеціальних функцій та математичних сталих величин

Назва пакету	Вид функції			
	$y = \sin(0,7\pi)$	π	e	$y = \Gamma(1,32)$
MS EXCEL	0,8090169943	3,141592653	2,718281828	0,89464063
Derive	0,8090169943	3,141592653	2,718281828	0,89464063
Mathcad 15	0,809	3,142	2,718	0,895

Таким чином, виникає необхідність до початку процесу обчислень визначити їх допустиму похибку. У багатьох випадках це може бути самостійним завданням. Тому в [14, 15] запропоновано проводити обчислення, результати яких використовують для аналізу надійності систем критичного застосування, диверсифікуючи процес їх отримання. Особливо слід згадати роботу [8]. В ній викладено методи обчислення багатьох спеціальних функцій і економічних алгоритмів, що реалізують цей процес. Істотним недоліком цієї роботи, з позицій сьогоднішнього дня, слід вважати те, що для реалізації цих алгоритмів використана мова, реалізована в мікрокалькуляторах серії «Електроніка». Сьогодні ці калькулятори можна побачити лише в музеях обчислювальної техніки. Пакет MS Excel дозволяє змінювати розрядність отриманих результатів, що робить його більш гнучким у порівнянні з іншими. Оскільки MS Excel, на

відміну від більшості спеціалізованих пакетів, працює практично на всіх основних платформах, а саме: Windows, Linux, MacOS, Android – слушно орієнтувати користувачські розробки саме на цей пакет. Приймаючи до уваги те, що операційна система Android працює на мобільних пристроях, таких, як планшети і смартфони, сфера використання розробок під MS Excel значно розширюється. Недооцінені можливості MS Excel розглянемо на прикладі, наведеному в [17]. Припустимо, що в докомп'ютерну, в сучасному тлумаченні цього терміну, епоху виникла необхідність скласти таблицю значень функції:

$$F(x) = (e^x + \cos(2x)) / (1 + x^2), \quad (1)$$

Таблиця 2 – Обчислювальна таблиця визначення значень функції «ФУНКЦІЯ»

x	2x	x ²	cos(2x)	e ^x	e ^x + cos(2x)	1 + x ²	F(x) = (e ^x + cos(2x)) / (1 + x ²)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
(1)	2(1)	(1) ²	cos(2)	e ⁽¹⁾	(5)+(4)	(1)+(3)	(6)/(7)

У сучасному розумінні табл. 2 – це макет робочого аркуша MS Excel. Слід зазначити, що організація за цією схемою обчислювального процесу дозволила створити всесвітньо відомі таблиці [2], перше видання яких вийшло в 1909 році [18].

Таким чином, можна вважати, що сьогодні є актуальним завдання розробки простих і зручних для програмування способів обчислення значень спеціальних функцій, розміщених на табличних процесорах. На думку авторів даного повідомлення, найбільш доступною у такому разі буде платформа MS Excel.

Аналіз літератури. В рамках даної роботи використано визначення понять «Елементарна функція» і «спеціальна функція», наведені в [6]. Елементарна функція визначена як функція, похідна якої також є елементарною функцією. Значення елементарної функції може бути отримане в результаті скінченного числа арифметичних операцій над аргументом, залежною змінною і постійними числами. До спеціальних функцій, згідно класифікації, прийнятої в [6], відносять неелементарні функції, які використовують для розв'язання задач математичної фізики, теорії ймовірності та інших задач в різних галузях науки і техніки.

В довідниках і таблицях спеціальних функцій можна виділити два способи подання матеріалу. В першому випадку спеціальні функції розташовані в довільному порядку, наприклад, як у [3, 7]. У другому випадку [2, 16] вони згруповані на загальногалузеві функції і фізичні спеціальні функції. Виходячи з цього, розглянуті в даній роботі функції також розподілено на дві групи. Перша група – спеціальні функції, які традиційно відносять до функцій математичної фізики. Друга група – спеціальні функції теоретичної фізики. Перелік функцій, які включено в ці групи, автори даного повідомлення формували виходячи з власного досвіду обчислювальної роботи.

Спеціальні функції визначають, найчастіше, у вигляді інтегралів з кінцевими або нескінченними

яка має назву «ФУНКЦІЯ». Технічне завдання для виконання цієї роботи, яке оформлене відповідно до [2], прийме вигляд: «Обчислити значення функції F(x) від x=a до x=b з кроком h із m десятковими знаками» Умовний запис цієї вимоги такий:

$$\langle F(x) \ x = a \ (h) \ b _mD \rangle.$$

Якщо потрібно обчислити одне значення цієї функції в точці x = a, то умовний запис цієї вимоги такий:

$$\langle F(x) \ x = a \ (0) \ a _mD \rangle$$

Для виконання роботи в [17] запропоновано скласти обчислювальну таблицю, табл. 2:

межами та/або у вигляді суми нескінченних рядів [1, 3, 16]. Для отримання їх чисельних значень використовують наступні методи: асимптотичні формули, заміну суми нескінченного ряду її частковою сумою, апроксимацію функції многочленами і раціональними функціями, розкладання функції з використанням ортогональних многочленів, найчастіше, многочленів Чебишева, подання функції у вигляді ланцюгового дробу [2, 5, 6, 8, 16]. Слід зазначити, що в більшості робіт, наприклад [21, 22], детально розглянуто багато завдань чисельного аналізу, що вирішуються на платформі MS Excel, але відсутній опис методів обчислення спеціальних функцій. Автори даного повідомлення в [23] виклали основні способи обчислення значень елементарних і спеціальних функцій з інтервальним аргументом, заданим в гіперболічній формі. Тому дане повідомлення можна розглядати як продовження роботи [23], але для функцій, аргументи яких задано в традиційній формі.

Мета дослідження: розробка програмного забезпечення для EXCEL-орієнтованого калькулятора для обчислення значень найбільш поширених спеціальних функцій.

Отримані результати

У даному повідомленні при обчисленні значень функцій використано, в основному, методи, що викладені в [2, 3, 5, 16]. В інших випадках це буде обумовлено окремо. При обчисленні спеціальних функцій виникає необхідність отримання значень власних і невластних інтегралів і визначення суми нескінченних рядів. У тих випадках, коли спеціальна функція представлена як інтеграл, обчислення його значення в рамках даної роботи послідовно виконують за методом прямокутників у вигляді, який описаний в [19] ($\varphi = 1, 2, \dots$):

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{\varphi \cdot n} \sum_{k=1}^{\varphi \cdot n} f\left(\frac{x_{k-1} + x_k}{2}\right) = \hat{I}_{\varphi}(\varphi \cdot n). \quad (2)$$

Процес обчислень припиняють при виконанні умови:

$$\left(\int_a^b f(x)dx \approx \hat{I}_{\varphi+1} \right) \Rightarrow \left(\left| \hat{I}_{\varphi+1} - \hat{I}_{\varphi} \right| \leq \varepsilon \right). \quad (3)$$

В (2) прийнято, що $\varphi \cdot n$ – кількість доданків $\varphi = 1, 2, \dots$, $\varepsilon = a \cdot 10^{-4}$, $1 < a < 9$. В даному повідомленні, за замовченням, прийнято, що $n=200$. В робочій версії калькулятора передбачена можливість зміни значень величин φ і ε за бажанням користувача. Багато спеціальних функцій задано у вигляді невластного інтеграла. Для його обчислення в даному повідомленні використано прийом, заснований на методі, який запропоновано в [20]. Розглянемо інтеграл:

$$I = \int_a^{\infty} f(x)dx. \quad (4)$$

Тоді його чисельне значення дорівнює:

$$\hat{I}_{p+1} = \hat{I}_0 + \sum_{u=1}^{p+1} \hat{I}_u. \quad (5)$$

У (5) прийнято, що:

$$\hat{I}_0 = \int_a^b f(x)dx, \quad \hat{I}_u = \int_{10^{u-1}b}^{10^u b} f(x)dx. \quad (6)$$

Обчислювальний процес припиняють, якщо виконано умову:

$$\left| \hat{I}_{p+1} - \hat{I}_p \right| \leq \varepsilon. \quad (7)$$

В цьому випадку приймають, що:

$$I \approx \hat{I}_{p+1}. \quad (8)$$

Якщо для обчислення значення спеціальної функції в точці $x = x_0$ використано нескінченний ряд:

$$y(x_0) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_0^i \quad (9)$$

то при обчисленні її калькулятор визначає значення n -ої часткової суми:

$$y_{\theta}(x_0) = \sum_{i=1}^{\theta n} a_i x_0^i, \quad \theta = 1, 2, \dots \quad (10)$$

У співвідношенні (10) величина n відповідає кількості доданків, яка прийнята при його реалізації в калькуляторі. За замовченням прийнято $n=10$. Процес обчислення зупиняють при виконанні умови:

$$\left| y_{\theta+1}(x_0) - y_{\theta}(x_0) \right| \leq \varepsilon; \quad (11)$$

в цьому випадку $y(x_0) \approx y_{\theta+1}(x_0)$.

У даній роботі, якщо іншого не обумовлено, при визначенні значень власних інтегралів використано співвідношення (2), (3). Для обчислення значень невластних інтегралів шляхом зведення їх до власних використано співвідношення (5)...(8). Для отримання суми нескінченного ряду використано процедуру, визначена співвідношеннями (10)... (11).

В архітектурі калькулятора передбачено, що значення функцій, які входять до складу MS Excel, визначають безпосередньо зверненням до них. Опис способів обчислень значень інших функцій описано окремо.

Обчислення значень гіперболічних функцій. Розв'язання багатьох задач механіки, зокрема теорії пружності, містять прямі і зворотні гіперболічні функції. В стандартний пакет MS Excel включено тільки деякі з них. Тому даний калькулятор містить розширений перелік гіперболічних функцій, який наведено в табл. 3. При його складанні прийнято до уваги роботи [2, 16]. У цій таблиці й далі жирним шрифтом виділено ті підпрограми, які входять в МАЙСТЕР ФУНКЦІЙ MS Excel.

Таблиця 3 – Гіперболічні функції та обернені гіперболічні функції, які включено до калькулятору

Гіперболічні функції			Обернені гіперболічні функції		
Назва	Символ	Обчислення	Назва	Символ	Обчислення
Синус гіперболічний	$sh(x)$	SINH(X)	Ареасинус гіперболічний	$Arsh(x)$	ASINH(X)
Косинус гіперболічний	$ch(x)$	COSH(X)	Ареакосинус гіперболічний	$Arch(x)$	ACOSH(X)
Тангенс гіперболічний	$th(x)$	TANH(X)	Ареатангенс гіперболічний	$Arth(x)$	ATANH(X)
Котангенс гіперболічний	$cth(x)$	$[TANH(X)]^{-1}$	Ареакотангенс гіперболічний	$Arcth(x)$	$Arcth(x) = Arch\left(\frac{1}{x}\right)$
Секанс гіперболічний	$sch(x)$	$[COSH(X)]^{-1}$	Ареасеканс гіперболічний	$Arsch(x)$	Співвідношення (12)
Косеканс гіперболічний	$csch(x)$	$[SINH(X)]^{-1}$	Ареакосеканс гіперболічний	$Arcsch(x)$	Співвідношення (13)
Гіперболічна амплітуда (гудерманіан)	$gd(x)$	$gd(x) = 2arctg(e^x) - \pi / 2$	Обернений гудерманіан	$gd^{-1}(x)$	Співвідношення (14, 15)

Співвідношення, які необхідні для обчислення значень функцій ареасеканс гіперболічний, ареакосеканс гіперболічний, обернений гудерманіан, такі:

$$Arsch(x) = \ln \left[\frac{1}{x} + \sqrt{\left(\frac{1}{x^2} - 1 \right)} \right], \quad 0 < x \leq 1. \quad (12)$$

$$Ar \operatorname{csch}(x) = \ln \left[\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1} \right], \quad x \neq 0. \quad (13)$$

$$gd^{-1}(x) = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{gd(x)}{2} \right) \right|. \quad (14)$$

$$gd^{-1}(x) = \int_0^x \frac{1}{\cos t} dt. \quad (15)$$

При обчисленні оберненого гудерманіана (14) виникла колізія, що вимагає окремого розгляду. Порівняння результатів інтегрування співвідношення:

$$\Omega = \int \frac{1}{\cos(x)} dx, \quad (16)$$

які наведено в таблицях інтегралів і виконаних системами аналітичних перетворень, показано в табл. 4.

Таблиця 4 – Порівняння результатів обчислення невідомого інтегралу (16)

Таблиці інтегралів		Системи аналітичних перетворень	
Градштейн, [1, (2, 525, 9)]	Dwight, [24, (442, 10)]	Derive	Mathcad
$\ln \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)$	$\ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \right $	$\ln \left(\operatorname{tg} \left(\frac{2x + \pi}{4} \right) \right)$	$\ln \left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x} \right)$

Очевидно, що коректним буде тільки співвідношення, яке наведено в [24]. Тому в [14, 15] запропоновано проводити обчислення, результати яких використовують для аналізу надійності систем критичного застосування, диверсифікуючи процес їх отримання. На рис. 1 та 2 наведено скрін-копії вікон калькулятора з результатами обчислення значень гіперболічних функцій і зворотних до них. Ці блоки калькулятора дозволяють обчислювати значення однієї з вибраних функцій або всіх одночасно.

Таблиця 5 – Перелік функцій Бесселя, що включено в MS Excel

Найменування функції	Визначення функції	Синтаксис функції
Функція Бесселя першого роду порядку n	$J_n(x) = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{(-1)^v}{v! \Gamma(n+v+1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{n+2v}$	БЕССЕЛЬ.Ж(x; n)
Функція Бесселя другого роду порядку n	$Y_n(x) = \frac{J_n(x) \cos(n\pi) - J_{-n}(x)}{\sin(n\pi)}$	БЕССЕЛЬ.У(x; n)
Модифікована функція Бесселя першого роду порядку n чисто уявного аргументу	$I_n(x) = i^{-n} J_n(ix)$	БЕССЕЛЬ.І(x; n)
Модифікована функція Бесселя другого роду порядку n	$K_n(x) = \frac{\pi}{2} i^{n+1} [J_n(ix) + iY_n(ix)]$	БЕССЕЛЬ.К(x; n)

На рис. 3 наведено скрін-копію вікна калькулятора з результатами обчислення значень функцій Бесселя. При обчисленні значень функцій Бесселя передбачено, що калькулятор обчислює тільки одну з функцій, наведених в табл. 5.

Обчислення значень гамма-функції та споріднених з нею функцій. Далі розглянуто способи обчислення гамма-функції, її логарифма, неповних гамма-функцій, полігамма-функцій, повної і неповної бета-

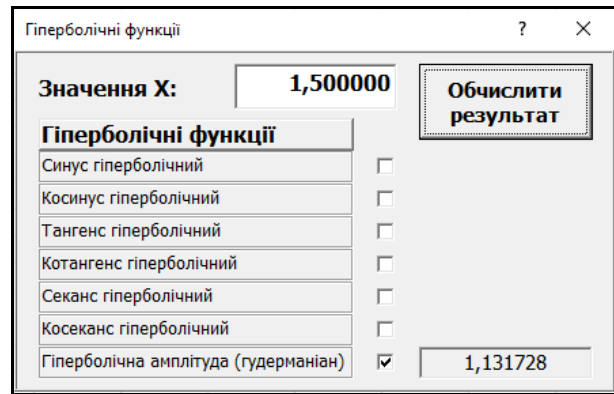


Рис. 1. Скрін-копія вікна калькулятора для розрахунку гіперболічних функцій (Fig. 1. The screen is a copy of the calculator window for calculating hyperbolic functions)

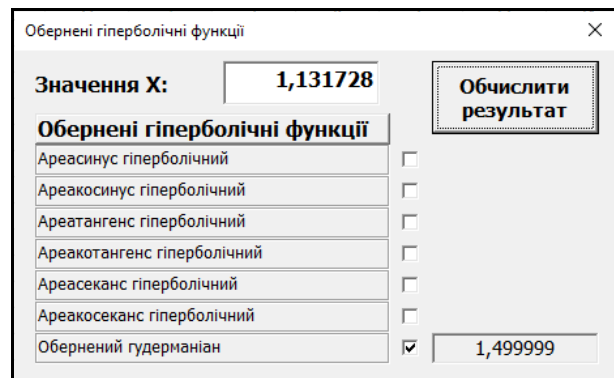


Рис. 2. Скрін-копія вікна калькулятора для розрахунку обернених гіперболічних функцій (Fig. 2. The screen is a copy of the calculator window for calculating inverse hyperbolic functions)

Обчислення значень функцій Бесселя. Калькулятор дозволяє обчислювати значення лише тих функцій Бесселя, які входять в МАЙСТЕР ФУНКЦІЙ MS Excel. Їх перелік наведено в табл. 5.

функції та їх частинних похідних. Слід взяти до уваги, що обчислення значень гамма-функції та її логарифма включене в MS Excel. При обчисленні значень функції $Q(x, a)$ використано співвідношення:

$$\Gamma((\alpha) = P(x, \alpha) + Q(x, \alpha). \quad (17)$$

На рис. 4 наведено скрін-копію вікна калькулятора з результатами обчислення значень гамма-функції і споріднених з нею функцій.

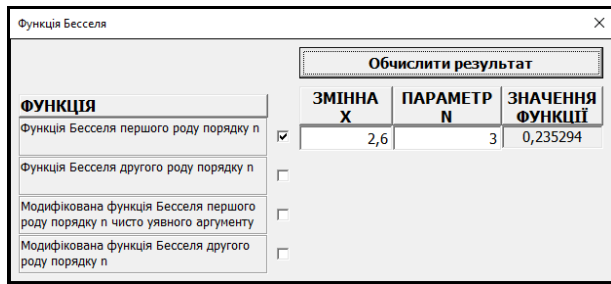


Рис. 3. Скрін-копія вікна калькулятора для розрахунку функцій Бесселя (Fig. 3. The screen is a copy of the calculator window for calculating Bessel functions)

Таблиця 6 – Методи обчислення гамма функцій та споріднених з нею функцій

Найменування функції	Визначення функції	Синтаксис функції, розрахункова формула
Гамма-функція	$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx, \alpha > 0$	ГАММА(x)
Логарифм гамма-функції	$\ln \Gamma(\alpha) = \ln \left(\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\alpha-1} dx \right), \alpha > 0$	ГАММАНЛОГ(x)
Нижня неповна Гамма-функція	$P(x, \alpha) = \int_0^x e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \alpha > 0$	Чисельне інтегрування
Верхня неповна Гамма-функція	$Q(x, \alpha) = \int_x^{\infty} e^{-t} t^{\alpha-1} dt, \alpha > 0$	$Q(x, \alpha) = \Gamma(\alpha) - P(x, \alpha)$

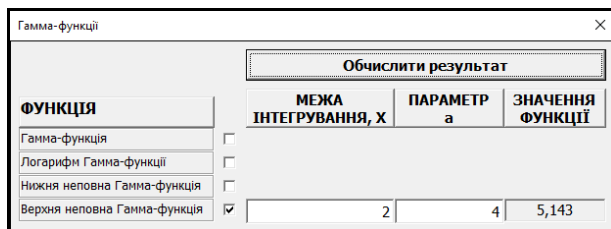


Рис. 4. Скрін-копія вікна калькулятора для розрахунку гамма-функції та споріднених з нею функцій (Fig. 4. The screen is a copy of the calculator window for calculating the gamma function and functions related to it)

При обчисленні значень функцій, вказаних в табл. 6, калькулятор обчислює лише значення однієї з указаних на рис. 4 функцій.

Полігамма-функцією порядку m від функції $\Gamma(x)$ називають співвідношення:

$$\Psi^{(m)}(x) = \frac{d^{m+1}}{dx^{m+1}} \ln \Gamma(x), m=0, 1, 2. \quad (18)$$

При $m=0$ отримаємо величину:

$$\Psi(x) = \frac{d}{dx} \ln \Gamma(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}. \quad (19)$$

При програмуванні калькулятора прийнято наступні умови (C – стала Ейлера):

$$m \leq 4, x > 0; C=0,577215. \quad (20)$$

При $m > 0$ значення $\Psi^{(m)}(x)$ визначали, використовуючи співвідношення [3]:

$$\Psi^{(m)}(x) = -\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1-t} (\ln t)^m dt. \quad (21)$$

В табл. 7 наведено порівняння результатів обчислення значень (20) і (21), отриманих при використанні процедури чисельного інтегрування (2), (3) і значень, які наведено в [16].

Таблиця 7 – Порівняння обчислених та табличних значень полігамма-функції

Найменування функції	Показник m	N^*	R^*
Дігамма-функція	0	-0,54478	-0,54484
Тригамма-функція	1	1,59811	1,598790
Тетрагамма-функція	2	-2,27905	-2,27883
Пентагамма-функція	3	6,01969	6,02410

N^* – Табличне значення функції, [16]

R^* – Розраховане за співвідношеннями (20), (21) значення функції

Всі значення обчислено для $x=1,020$. Таким чином, співвідношення (20), (21) дають задовільне співпадіння з результатами, які наведено в [16]. Скрін-копії вікон калькулятора з результатами обчислення полігамма-функцій показано на рис. 5, рис. 6. В роботі калькулятора, передбачено можливість одночасного обчислення всіх полігамма-функцій до $m = 4$ (рис. 5) або, при $m = 0$, лише дігамма-функції. Інакше калькулятор видає повідомлення про помилку (рис. 7).

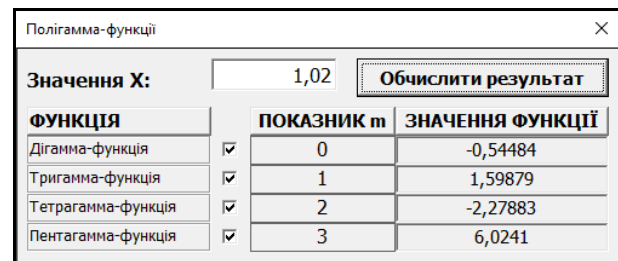


Рис. 5. Скрін-копія вікна калькулятора для розрахунку полігамма-функцій (Fig. 5. The screen is a copy of the calculator window for calculating polygamma functions)

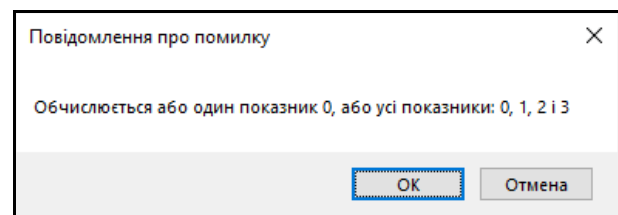


Рис. 6. Приклад повідомлення про помилку (Fig. 6. The screen is a copy of the calculator window with example of an error message)

Приклад помилкового набору для обчислення полігамма-функцій наведено на рис. 7.

Відповідно до [25, 26] в табл. 8 наведено співвідношення для обчислення бета-функції, неповної бета-функції та її частинних похідних.

Скрін-копія вікна калькулятора, призначеного для обчислення бета-функції, неповної бета-функції і її частинних похідних показана на рис. 8.

Результати обчислень, наведених на цьому рисунку, виконано при таких значеннях:

$$a=2, b=3, x=0,7.$$

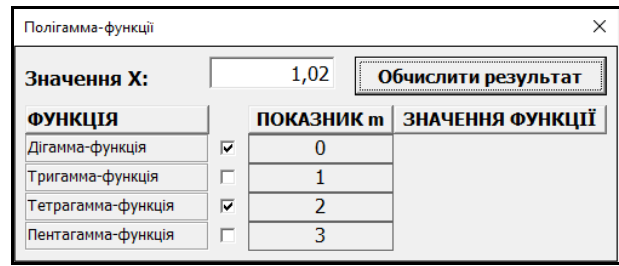


Рис. 7. Скрін-копія вікна калькулятора з прикладом помилкового набору даних (Fig. 7. The screen is a copy of the calculator window with an example of a wrong data set)

Таблиця 8 – Співвідношення, призначені до обчислення бета-функції, неповної бета-функції та її частинних похідних

Функції та їх умовні позначення	Розрахункові співвідношення
Бета-функція, $B(a,b)$	$B(a,b) = B(b,a) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}, a > 0, b > 0.$
Неповна бета-функція, $INB(x,a,b)$	$B_x(a,b) = \int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt$
Нормалізована неповна бета-функція, $NINB(x,a,b)$	$I_x(a,b) = \frac{B_x(a,b)}{B(a,b)} = \frac{1}{B(a,b)} \int_0^x t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt$
Перші частинні похідні бета-функції: $dB(a,b)/da, dB(a,b)/db$	$\frac{\partial}{\partial a} B(a,b) = B(a,b) \cdot [\Psi(a) - \Psi(a+b)]; \frac{\partial}{\partial b} B(a,b) = B(a,b) \cdot [\Psi(b) - \Psi(a+b)]$
Перша частинна похідна нормалізованої неповної бета-функції, $dNINB(x,a,b)/dx$	$\frac{\partial}{\partial x} I_x(a,b) = \frac{(1-x)^{b-1} x^{a-1}}{B(a,b)}$
Другі частинні похідні бета-функції $ddB(a,b)/dada$ $ddB(a,b)/dbdb$ $ddB(a,b)/dadbd$	$\frac{\partial^2}{\partial a^2} B(a,b) = B(a,b) \cdot \{[\Psi(a) - \Psi(a+b)]^2 + \Psi_1(a) - \Psi_1(a+b)\}$ $\frac{\partial^2}{\partial b^2} B(a,b) = B(a,b) \cdot \{[\Psi(b) - \Psi(a+b)]^2 + \Psi_1(b) - \Psi_1(a+b)\}$ $\frac{\partial^2}{\partial a \partial b} B(a,b) = B(a,b) \cdot \{[\Psi(a) - \Psi(a+b)] \cdot [\Psi(b) - \Psi(a+b)] - \Psi_1(a+b)\}$

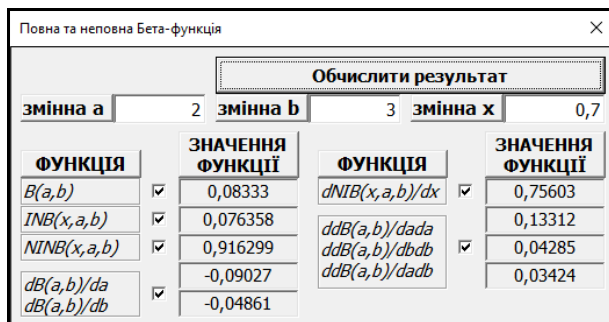


Рис. 8. Скрін-копія вікна калькулятора, призначеного для розрахунку бета-функції, неповної бета-функції та її частинних похідних

(Fig. 8 Screen-a copy of the calculator window for calculating the beta function, incomplete beta function and its partial derivatives)

Обчислення значень інтегралів Френеля. Найбільше розповсюдження інтеграли Френеля отримали при розрахунку оптичних систем. Основні типи інтегралів Френеля і способи визначення їх чисельних значень наведено в табл. 9. Скрін-копію відповідно вікна калькулятора показано на рис. 9.

Результати розрахунків, які наведено на цьому рисунку, виконано при $x=0,7$.

Таблиця 9 – Основні типи інтегралів Френеля, які використано в роботі

I*	Розрахункове співвідношення	I*	Розрахункове співвідношення
$S(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$	$C(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$
$S_1(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2 dt\right)$	$C_1(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \cos\left(\frac{\pi}{2} t^2 dt\right)$
$S_2(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$	$C_2(x)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$

I* – Позначення інтегралу

На рис. 9 показано скрін-копію вікна калькулятора, призначеного для розрахунку інтегралів Френеля. Обчислення значень інтегральних кругових і гіперболічних тригонометричних функцій. Визначення цих функцій надано в табл. 10.

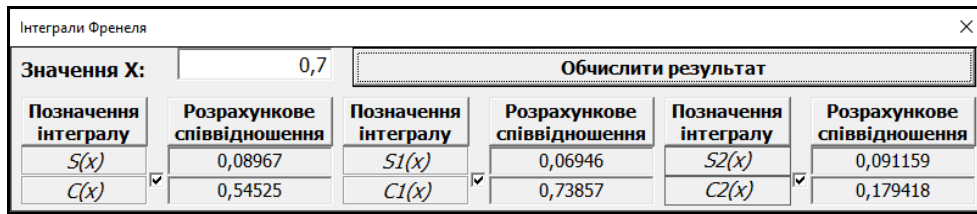


Рис. 9. Скрін-копія вікна калькулятора, призначеного для розрахунку інтегралів Френеля (Fig. 9. Screen-a copy of the of the calculator window designed for calculating Fresnel integrals)

Таблиця 10 – Визначення кругових інтегральних тригонометричних та гіперболічних функцій

Найменування функції	Розрахункове співвідношення
Кругові інтегральні тригонометричні функції	
Інтегральний синус, $Si(x)$	$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt$
Інтегральний синус, $si(x)$	$si(x) = -\int_x^\infty \frac{\sin(t)}{t} dt \approx -\int_x^{x+100} \frac{\sin(t)}{t} dt$
Інтегральний косинус, $Ci(x)$	$Ci(x) = -\int_x^\infty \frac{\cos(t)}{t} dt \approx -\int_x^{x+100} \frac{\cos(t)}{t} dt$
Інтегральний косинус, $ci(x)$	$ci(x) = C + \ln x + \int_0^x \frac{\cos(t)-1}{t} dt$
Гіперболічні інтегральні тригонометричні функції	
Інтегральний гіперболічний синус, $Shi(x)$	$Shi(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sh}(t)}{t} dt$
Інтегральний гіперболічний косинус, $Chi(x)$	$Chi(x) = C + \ln x + \int_0^x \frac{\operatorname{ch}(t)-1}{t} dt$

При реалізації співвідношень, наведених в табл. 10, взято до уваги рівності:

$$Ci(x) = ci(x); \tag{22}$$

$$si(x) = Si(x) - \frac{\pi}{2}. \tag{23}$$

Функцію інтегрального арктангенса $Ti(x)$ в [7] визначено співвідношеннями:

$$Ti_2(x) = \begin{cases} \int_0^x \frac{\operatorname{arctg}(t)}{t} dt, & \text{якщо } |x| \leq 1, \\ \frac{\pi}{2} \ln x + \int_0^{1/t} \frac{\operatorname{arctg}(t)}{t} dt, & \text{якщо } x \geq 1. \end{cases} \tag{24}$$

При цьому слід взяти до уваги співвідношення:

$$-T(x) = T(-x). \tag{25}$$

Скрін-копія відповідного вікна калькулятора показана на рис. 10.

Всі розрахунки в приведеному на рис. 10 прикладі виконано при $x=0,7$.

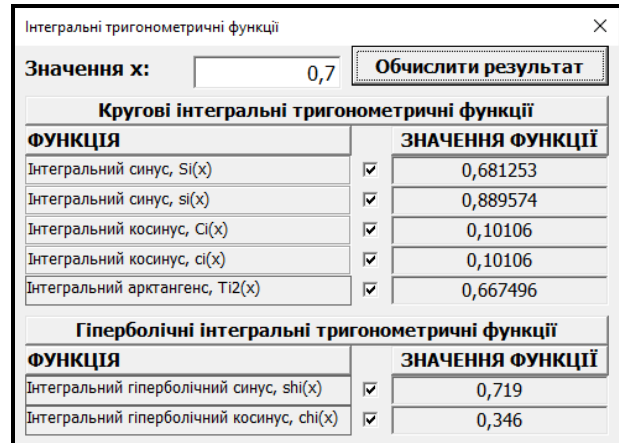


Рис. 10. Скрін-копія вікна калькулятора, призначеного для розрахунку інтегральних тригонометричних функцій (Fig. 10 (Screen-a copy of the of the calculator window designed for calculating integral trigonometric functions)

Обчислення значень інтегральної показникової функції, інтегрального логарифма і ділогарифма. В [1, 8.211] інтегральна показникова функція визначена як співвідношення для $x < 0$:

$$Ei(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{-t}}{t} dt = -\int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \tag{26}$$

і в [16, 5.1.2] як співвідношення для $x > 0$:

$$Ei(x) = -vp \int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = vp \int_{-\infty}^x \frac{e^{-t}}{t} dt. \tag{27}$$

Символ vp означає, що інтеграл розглядають в сенсі головного значення по Коші, тобто:

$$vp \int_{-x}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\int_{-x}^{-\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right]; \tag{28}$$

$$vp \int_{-\infty}^x \frac{e^{-t}}{t} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{-t}}{t} dt + \int_{\varepsilon}^x \frac{e^{-t}}{t} dt \right]. \tag{29}$$

Варіантом інтегральної показникової функції є функція $Ei(-x)$, визначена співвідношенням для $x > 0$:

$$Ei(-x) = -\int_x^{\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt, \tag{30}$$

Для отримання чисельного значення функції $Ei(x)$ в калькуляторі використано наведене в [3, 9.1.5.2] співвідношення:

$$Ei(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t} dt = C + \ln x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k \cdot k!} \approx C + \ln x + \sum_{k=1}^{100} \frac{x^k}{k \cdot k!} \quad (31)$$

Для отримання чисельного значення функції $Ei(-x)$ в калькуляторі використано наведене в [1, 8.212.1] співвідношення:

$$Ei(-x) = C + \ln(x) + \int_0^x \frac{e^t - 1}{t} dt. \quad (32)$$

В табл. 11 наведено для порівняння значення інтегральної показникової функції обчислені по співвідношеннях (29), (30) і наведені в [3].

Таблиця 11 – Порівняння обчислених та табличних значень функцій $Ei(x)$ та $Ei(-x)$

Значення аргументу, x	Табличне, [3]	Згідно з розрахунком
Значення функції $Ei(x)$		
0,7	1,0649	1,0645
1,0	1,8951	1,8953
1,7	3,9210	3,9211
Значення функції $Ei_1(x) = -Ei(-x)$		
0,7	0,3738	0,3740
1,0	0,21938	0,21939
1,7	0,07465	0,07463

Результати, наведені в табл. 11, дозволяють зробити висновок про добре співпадіння обчислених і табличних значеннях функцій $Ei(x)$ і $Ei(-x)$.

Функцію інтегрального логарифма визначають у вигляді співвідношення:

$$li(x) = \begin{cases} \int_0^x \frac{dt}{\ln t}, & \text{якщо } 0 < x < 1, \\ \text{vp} \int_0^x \frac{dt}{\ln t}, & \text{якщо } x > 1. \end{cases} \quad (33)$$

За умови, що:

$$\text{vp} \int_0^x \frac{dt}{\ln t} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dt}{\ln t} + \int_{1+\varepsilon}^x \frac{dt}{\ln t} \right]. \quad (34)$$

У даній роботі для обчислення значень функції $li(x)$ замість (33) і (34) використано наведені в [3] співвідношення для $0 < x < 1$:

$$li(x) = \ln(-\ln x) + C + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^k}{k \cdot k!} \approx \ln(-\ln x) + C + \sum_{k=1}^{10} \frac{(\ln x)^k}{k \cdot k!}, \quad (35)$$

а також для $x > 1$:

$$li(x) = \ln(\ln x) + C + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^k}{k \cdot k!} \approx \ln(\ln x) + C + \sum_{k=1}^{10} \frac{(\ln x)^k}{k \cdot k!}. \quad (36)$$

Для визначення кількості доданків в (35) і (36) був проведений чисельний експеримент, результати якого показано в табл. 12.

Таблиця 12 – Визначення кількості доданків при наближеному обчисленні функції інтегрального логарифму

Значення аргументу, x	Кількість доданків		
	10	100	1000
0,7	-0,78095	-0,78095	-0,78095
1,7	0,55373	0,55373	0,55373

З наведених в табл. 12 даних видно, що для забезпечення необхідної точності обчислень в співвідношеннях (35), (36) досить використовувати десять доданків.

Комплексну величину, яку визначають співвідношенням:

$$Li_u(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^u}, \quad (37)$$

називають полілогарифмом. При $u=2$ співвідношення (37) називають ділогарифмом. Відомості, необхідні для обчислення цієї величини, наведено в [3, 6, 16, 28]. У загальному випадку ділогарифм $Li_2(x)$ визначають співвідношенням:

$$\tilde{Li}_2(x) = \begin{cases} Li_2(x), & \text{якщо } x \leq 1, \\ Li_2(x) + i\pi \ln x, & \text{якщо } x > 1. \end{cases} \quad (38)$$

Величину $Li_2(x)$ визначають, використовуючи співвідношення:

$$Li_2(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt \quad x \in (-\infty, 1]. \quad (39)$$

У (39) використано визначення величини $Li_2(x)$, наведене в [3, 6, 28]. Якщо аргумент $x \notin (-\infty, 1]$, то слід використовувати такі співвідношення:

$$Li_2(x) = \pi^2/6 - \ln(x) \ln(x-1) - \frac{1}{2} \ln(x) + Li_2\left(1 - \frac{1}{x}\right), \quad 1 < x \leq 2; \quad (40)$$

$$Li_2(x) = \frac{\pi^2}{3} - \frac{1}{2} (\ln x)^2 - Li_2\left(\frac{1}{x}\right), \quad 2 < x < \infty. \quad (41)$$

Для перевірки схеми обчислень, представленої співвідношеннями (39), (41), виконано обчислення, які представлені в табл. 13. Як контрольні прийняті табличні значення функції $Li_2(x)$, наведені в [28].

Таблиця 13 – Табличні та обчислені значення функції ділогарифму

Значення змінної, x	Табличні значення функції ділогарифму		Обчислені значення функції ділогарифму	
	$Re Li_2(x)$	$Im Li_2(x)$	$Re \hat{L}i_2(x)$	$Im \hat{L}i_2(x)$
-0,5	-0,44841	0	-0,44839	0
0,5	0,58224	0	0,58220	0
-1,5	-1,14738	0	1,14740	0
1,5	2,37439	1,27380	2,37437	1,27380
-3	-1,93937	0	-1,93939	0
3	2,32018	3,45139	2,32029	3,45139

Результати, які наведено в табл. 13, дозволяють зробити висновок про добре співпадіння обчислених і табличних значень відповідних функцій.

Обчислення значень функцій теоретичної фізики. В [6] для комплексної змінної $z = e^{ix}$ розглянуто її ділогарифм:

$$Li_2(e^{ix}) = Gl_2(x) + iCl_2(x), \quad x \in [0, \pi] \quad (42)$$

Дійсну частину співвідношення (42) називають приєднаною функцією Клаузена, уявну частину цього співвідношення називають функцією Клаузена:

$$Re Li_2(e^{ix}) = Gl_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx)}{k^2} \approx \sum_{k=1}^{1000} \frac{\cos(kx)}{k^2}; \quad (43)$$

$$Im Li_2(e^{ix}) = Cl_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2} \approx \sum_{k=1}^{1000} \frac{\sin(kx)}{k^2}. \quad (44)$$

В [3] наведено окремі значення цих функцій, які використано для перевірки роботи обраних чисельних методів:

$$Cl_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = G, \quad Gl_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi^2}{48} \approx -0,20561; \quad (45)$$

$G = 0,91596$ – стала Каталана.

Якщо у співвідношеннях (43) і (44) прийняти $k = 1000$, то отримаємо для функції $Cl(\pi/2)$ чисельне значення, яке співпадає з наведеним в (45) результатом до п'яти значущих цифр, для функції $Gl(\pi/2)$ отримаємо чисельне значення, яке співпадає з (45) до чотирьох значущих цифр.

В [3] наведено функцію Лобачевського у вигляді:

$$L(x) = \begin{cases} -\int_0^x \ln(\cos t) dt, & \text{якщо } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]; \\ x \cdot \ln 2 - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \sin(2kx), & \text{якщо } x \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]; \end{cases} \quad (46)$$

$$L(-x) = -L(x).$$

Для цієї функції відомі її окремі значення:

$$L\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} \ln 2 - \frac{G}{2}; \quad (47)$$

$$L\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{3\pi}{4} \ln 2 + \frac{G}{2}.$$

В табл. 14 наведено порівняння табличних (47) та обчислених значень функції Лобачевського.

Таблиця 14 – Порівняння частинних та обчислених значень функції Лобачевського

Значення змінної, x	Частинне значення	Обчислене значення
$\pi/4$	0,08643	0,08640
$3\pi/4$	2,09114	2,09114 ^{*)}

^{*)} – кількість доданків в (43), (44); $\kappa = 500$

У перелік програм калькулятора включено обчислення функцій Дебая [16]:

$$Db(x) = \frac{n}{x^n} \int_0^x \frac{t^n}{e^t - 1} dt, \quad n = 1(1)4. \quad (48)$$

і функції інтегрального секанса (функції Зіверта) [16]:

$$F(\theta, x) = \int_0^{\theta} \exp\left(-\frac{x}{\cos t}\right) dt, \quad x > 0. \quad (49)$$

При порівнянні результатів обчислень з використанням співвідношення (49) і даних, наведених в [16, табл. 27.4, с. 791], слід прийняти до уваги наступне: у вказаній таблиці використана градусна міра величини θ , при обчисленні значення функції Зіверта за співвідношенням (47) слід використовувати радіанну міру цієї величини.

Обчислення значень функцій багаточленними наближеннями. Запропоновані раніше методи обчислення значень функцій індивідуальні для кожної з них.

Найбільш загальним методом може бути метод багаточленних наближень. У даному повідомленні для цього використано многочлени Чебишева у варіанті, викладеному в [29].

Представимо значення функції $f_u(x)$, $u = 1, 2$, у вигляді:

$$f_u(x_0) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{ju} T_j(x_0) \approx \sum_{j=0}^{12} a_{ju} T_j(x_0), \quad u = 1, 2, \dots, \quad (50)$$

де коефіцієнти a_{ju} залежать лише від виду u -ої функції. Ці коефіцієнти для різних функцій наведено, наприклад, в [6, 7].

Перші тринадцять многочленів Чебишева $T_j(x)$ наведено в [29, с. 503] і показано в табл. 15.

Таблиця 15 – Співвідношення для перших тринадцяти многочленів Чебишева

$T_0(x) = 1$
$T_1(x) = x$
$T_2(x) = 2x^2 - 1$
$T_3(x) = 4x^3 - 3x$
$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$
$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$
$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$
$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$
$T_8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$
$T_9(x) = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x$
$T_{10}(x) = 512x^{10} - 1280x^8 + 1120x^6 - 400x^4 + 50x^2 - 1$
$T_{11}(x) = 1024x^{11} - 2816x^9 + 2816x^7 - 1232x^5 + 220x^3 - 11x$
$T_{12}(x) = 2048x^{12} - 6144x^{10} + 6912x^8 - 3584x^6 + 840x^4 - 72x^2 + 1$

В цьому випадку порядок обчислень показано на рис. 11.

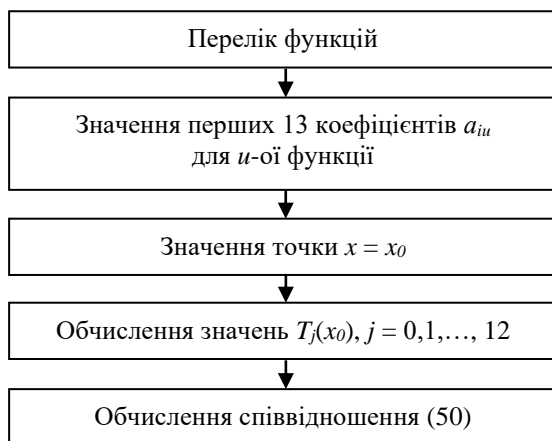


Рис. 11. Порядок застосування многочленів Чебишева для обчислення значення функції (Fig. 11. The procedure for applying Chebyshev polynomials to calculate the value of a function)

Наведена схема надає можливість користувачеві застосувати запропонований калькулятор для будь-яких функцій, для яких відомі чебишевські коефіцієнти якнайкращого наближення a_{ju} . Для ор-

ганізації обчислення функцій чебишевськими наближеннями слушно використати розумну таблицю. Передбачається, що список функцій створюється і редагується самими користувачами. Параметри кожної функції записуються в окремому рядку розумної таблиці. При цьому розмір таблиці змінюється відповідно до кількості рядків. Параметри a_0 - a_{12} індивідуальні для кожної функції і вводяться користувачем при її додаванні у таблицю, а формули, які обчислюють значення параметрів T_0 - T_{12} , однакові для всіх функцій, і вони автоматично копіюються в новий рядок з попереднього рядка.

Форма для обчислення функцій чебишевськими наближеннями містить дві вкладки: на першій розміщуються команди для внесення у таблицю нової функції, редагування параметрів будь-якої існуючої функції і видалення з таблиці вибраної зі списку функції. У режимі створення нової функції треба вказати її назву, код і ввести набір параметрів a_0 - a_{12} . Параметри нової функції записуються у кінець таблиці. Для редагування параметрів функції на екран виводиться список існуючих функцій, з якого треба вибрати потрібну. Завдяки розумній таблиці перелік функцій завжди буде актуальним. Редагувати можна лише назву, код і набір параметрів a_0 - a_{12} .

Для видалення з таблиці непотрібної функції її також треба вибрати зі списку. Оскільки відновити видалену функцію неможливо, то передбачається додаткове підтвердження на її видалення. При цьому у таблиці повинна залишитися принаймні одна функція, щоб зберігалися формули для обчислення параметрів T_0 - T_{12} . Запропонований в даному повідомленні калькулятор було використано авторами для розв'язання задач теорії інформації.[37].

Історико-бібліографічне доповнення

В роботах з історії математики можна прочитати такий вираз: «В...році якийсь N видав математичні таблиці функції F(.)». Технологія обчислення таблиць в цих роботах, як правило, не згадується. В цій частині даного повідомлення автори зроблять спробу відповісти на питання про те, як обчислювали математичні таблиці в той час, коли динозаврів вже не було, а комп'ютери ще були живими істотами.

Як відомо, з часом ряд термінів змінили, або придбали додаткові значення. У відповідь на питання про те, коли з'явилися перші комп'ютери, найчастіше буде згадана компанія Apple Computer, яка в 1977 році представила на виставці West Coast Computer Faire один з перших зразків того, що потім стали називати персональним комп'ютером. Можливо, деякі зможуть пригадати ENIAC, який створили два американських учених Еккерт, Джон Преспер (John Adam Presper Eckert) і Джон Уільям Моклі (John William Mauchly) в 1942 році. Вірогідність почути трактування значення цього слова з прив'язкою до людини, достатньо мала, бо, на жаль, етимологічні словники не відносяться до переліку найбільш популярної довідкової літератури. Автори даного повідомлення встановили, що перша згадка слова «комп'ютер» в англійській мові зафіксована в 1613 році в книзі Річарда Брейтуейта (Richard

Brathwait) «The Yong Mans Gleanings». В ній йшлося про людину, яка «справжнісінький комп'ютер... кращий математик, який коли-небудь жив» [30]. Приблизно в цей же час, в період правління короля Людовика XIII, з'явився астрологічний твір, в якому в переліку професій, які знаходяться під впливом планети Меркурій серед богословів, філософів, астрологів, геометрів згадуються і обчислювачі [31]. В енциклопедичному словнику Брокгауза і Ефрона (1892 рік) до цієї професії відносили тих, хто займався обчисленнями при обробці спостережень і вимірювань в астрономії та геодезії. Причому, від них не потрібна була наявність спеціальних знань у вищезгаданих науках, хоча і була бажаною [31]. Ці люди, яких можна віднести до категорії комп'ютерів і обчислювачів, стали широко затребуваними в кінці XVIII століття на піку розвитку промислової революції. Їх активна діяльність продовжувалася аж до кінця Другої Світової війни і пішла на спад лише після масового впровадження електронних обчислювальних машин.

Як відзначено в роботі [32], одним з перших вдалих результатів роботи комп'ютерів (обчислювачів) стало створення математичної моделі орбіти комети Галлея математиком і астрономом Алексисом Клодом Клеро (Alexis Claude Clairaut). Всю роботу з виконання необхідних розрахунків здійснили його друг Джозеф Джером Лаланд і дружина королівського годинникаря Рейн Лепот (Nicole-Reine Leraute). Необхідно відзначити, що ця жінка не була новачком у науці. У 1751 році в журналі «Особливості годинникової справи» (Traité d'horlogerie) опубліковано результати її дослідження, присвячені коливанням маятників різної довжини [33]. Їх робота була завершена на початку листопада 1757 року. В результаті цих розрахунків 13 квітня 1759 року комета повинна була досягти перигея своєї орбіти по відношенню до Сонця (прогноз Клеро не співпав з дійсним перигеем на тридцять один день). Як приклад одного з перших випадків масового використання праці людей-комп'ютерів (близько 80), можна вважати діяльність інженера-будівельника Гаспара Клера Франсуа Марі Ріш, барона де Проні (фр. Gaspard Clair François Marie Riche, baron de Prony) в процесі підготовки дев'ятнадцяти томів тригонометричних і логарифмічних таблиць для революційного французького уряду [34.] 35.

Надалі практика використання праці обчислювачів стала широко використовуватися в обсерваторіях у всьому світі. Так в штатах Миколаївської головної астрономічної обсерваторії в 1862 р. числилися два обчислювачі з річним розміром платні кожному в 400 рублів [36]. Для того часу це була величезна заробітна плата. Для порівняння, в 1862

році молодші офіцери (обер-офіцери) отримували в рік 114 рублів, а штаб-офіцери до 300. До кінця XIX століття в найбільш економічно розвинених країнах чисельність обчислювачів різко зросла і почали формуватися справжні комп'ютерні офіси. Природно, що одним з головних замовників обчислювань були армія і військово-морський флот, які потребували таблиці для артилерії, навігації та ін. В період Другої Світової війни люди-комп'ютери розраховували балістичні траєкторії, розповсюдження ударної хвилі, навантаження на плани, навігаційні таблиці, ефективні плани бомбардувань, оптимальні виробничі стратегії і можливі ключі шифрування [32]. Найважливішу роль зіграли обчислювачі в створенні атомної бомби і освоєнні космосу. У 2018 році відзначила свій сторічний ювілей Кетрін Джонсон (Katherine Johnson) (26.08.1918-24.02.2020), людина-комп'ютер NASA, без якої не відбулися б перші польоти американців у космос.

Навіть після масового розповсюдження ЕОМ люди-комп'ютери залишалися затребуваними ще впродовж ряду років. Як відзначено в роботі [32], вони виконували такі завдання, як управління обчислювальними машинами, або перевірка комп'ютерних програм шляхом перерахунку результатів. Один з авторів даного повідомлення, працюючи вже у восьмидесяті роки минулого століття в конструкторському бюро, ще застав таких людей, останніх представників славного заgonу живих комп'ютерів.

Висновки

1. Запропоновано і реалізовано EXCEL-орієнтовані алгоритми обчислення найбільш поширених спеціальних функцій математичної і теоретичної фізики.

2. Описано способи адаптивного визначення кількості інтервалів при чисельному інтегруванні, необхідних для досягнення прийнятої точності обчислень. Для невласних інтегралів запропонована процедура їх заміни на інтеграли з кінцевими межами, які забезпечують проведення обчислень із заданою похибкою.

3. Запропоновано процедури для визначення кількості доданків в n -ій частковій сумі функціонального ряду з нескінченною кількістю доданків, для забезпечення необхідної точності обчислень.

4. Показано, що запропоновані алгоритми забезпечують точність обчислень не меншу, ніж пакет Mathcad.

5. Запропоновано і реалізовано алгоритм обчислення значень функцій, що використовує многочлени Чебишева. Алгоритм дозволяє використовувати його для обчислення значень довільної неперервної функції, заданої користувачем.

REFERENCES

1. Gradshteyn, I. and Ryzhik's, I. (2014), *Table of Integrals, Series, and Products*, D. Zwillinger and V. Moll (eds.), Eighth edition, 1184 p., available at: <https://www.sciencedirect.com/book/9780123849335/table-of-integrals-series-and-products>
2. Janke, E., Emde, F. and Lösch, F. (1960), *Tafeln Höherer Funktionen*, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 344 p., available at: <https://www.zvab.com/buch-suchen/titel/tafeln-h%F6herer-funktionen/>
3. Dunaev, A. S. and Shlychkov V. I. (2015), *Special functions, Textbook*, vol. 2, Ural University, Ekaterinburg, 1322 p., available at: <https://urait.ru/book/specialnye-funkcii-v-2-ch-chast-2-514323>

4. Carlson, B. and Goldstein, M. (1955), *Rational approximation offunctions*, Los Alamos Scientific Laboratory LA-1943, 384 p., doi: <https://doi.org/10.2172/4374577>
5. Lyusternik, L. A., Chervonenkis, O. A. and Yanpolskiy, A. R. (1963), *Mathematical Analysis: Computation of Elementary Functions*, NAUKA, 248 p., available at: <https://www.livelib.ru/pubseries/719771-spravochnaya-matematicheskaya-biblioteka>
6. Popov, B. A. and Tesler, G. S. (1984), *Calculation of functions on a computer*, Naukova dumka, Kyiv, 600 p., available at: <https://b.eruditor.link/file/760286>
7. Luke, Yudell, L. (1975), *Mathematical function and their approximations*, Academic Press, London, 568 p., available at: <https://www.abebooks.com/9780124599505/Mathematical-Functions-Approximations-Luke-Yudell-0124599508/plp>
8. Tsimring, Sh. E. (1988), *Special functions and definite integrals, Algorithms, programs for microcalculators*, Publishing House "RADIO I SVYAZ", Moscow, 272 p., available at: <https://t-library.net/read/2796>
9. Iske, A. (2018), *Approximation theory and algorithms for data analysis*, Springer, New York, 358 p., available at: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030-05228-7>
10. Kanevsky, Yu. S. (2015), *Computer arithmetic*, DiaSoft, Kyiv, 231 p., available at: https://kanevsky.kpi.ua/wp-content/uploads/2017/09/Arithmet_A5.pdf
11. Brent, Richard P. and Zimmermann, P. (2010), *Modern Computer Arithmetic (Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, Series Number 18), 1st Edition*, Cambridge University Press, Cambridge, 236 p., available at: <https://www.amazon.com/Arithmetic-Cambridge-Monographs-Computational-Mathematics/dp/0521194695>
12. Lyusternik, L. A., Abramov, A. A., Shestakov, V. I. and Shura-Bura, M. R. (1952), *Solving mathematical problems on automatic digital machines. Programming for high-speed electronic calculating machines*, Publishing House of the Academy of Sciences, 327 p., available at: <https://www.computer-museum.ru/biblioteka/publication/841/>
13. Brusnetsov, N. P., Maslov, S. P. and Rozin, V. P. (1965), *Small digital computer "SETUN"*, MSU Publ. House, 130 p., available at: https://korobkknig.ru/promishl_proizvod/elektronika/malaya-cifrovaya-vychislitelnaya-mashina-setun-12534.html
14. Frolov, V., Frolov, O. and Kharchenko, V. (2019), "Classification of Diversity for Dependable and Safe Computing", *CEUR 2362, conference COLINS*, pp. 355–365, available at: <https://ceur-ws.org/Vol-2362/paper32.pdf>
15. Frolov, V., Kharchenko, V., Orekhov, O. and Frolov, O. (2020), "Analysis of variant of two-version multi-module web application using cloud services", *Radioelectronic and Computer Systems*, no 2, pp. 80–91, doi: <https://doi.org/10.32620/reks.2020.2.07>
16. Abramowitz, M. and Stegun, I. A. (1965), *Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover Publications, inc., New York, 1046 p., available at: <https://digital.library.unt.edu/ark:/67531/metadc40302/>
17. Demidovich, B. P. and Maron I. A. (1970), *Fundamentals of computational mathematics*, SCIENCE, 664p., available at: <http://flibusta.site/b/744699>
18. Jahnke, E. and Emde F. (1909), *Funktionentafeln mit Formeln und Kurven*, B. G. Teubner, Berlin, 1909, 176 p., available at: <https://www.buchfreund.de/de/d/p/97512494/funktionentafeln-mit-formeln-und-kurven>
19. Dubovyk, V. P. and Yuryk, I. I. (2006), *Higher mathematics: Study guide*, A.S.K, Kyiv, 648 p., available at: https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/Dubovyk_P2_2008_240.pdf
20. Kalitkin, N. M. (1978), *Numerical methods*, 512 p., available at: https://books.4nmv.ru/books/chislennye_metody_2-e_izd_3643177.pdf
21. Zadachyn, V. M. and Konyushenko, I. G. (2014), *Numerical methods: study guid*, HNEU, Kharkiv, 180 p., available at: http://kist.ntu.edu.ua/textPhD/CHM_Zadachin.pdf
22. Volontyr, L. O., Zelinska, O. V., Potapova, N. A. and Chikov, I. A. (2020), *Numerical methods: Study guide*, VNAU, Vinnytsia, 322 p., available at: <http://repository.vsau.org/getfile.php/27703.pdf>
23. Dubnitskiy, V., Kobylin, A., Kobylin, O. and Kushneruk, Y. (2021), "EXCEL-orientated procedure for calculating the values of special functions with interval argument assigned on the hyperbolic form", *Advanced Information Systems*, Vol. 5, No. 4, pp. 116–123., available at: <https://doi.org/10.20998/2522-9052.2021.4.16>
24. Dwight, H. B. (1957), *Tables of ntegrals and oher mahemaical data, third edition*, The Macillan Comp., New York, 198 p., available at: <https://www.amazon.com/Tables-Integrals-Other-Mathematical-Data/dp/0023311703>
25. (2024), *Wolfram Math World Beta Function*, available at: <https://mathworld.wolfram.com/BetaFunction.html>
26. (2024), *Derivative of the Incomplete Beta Function*, available at: https://beta.boost.org/doc/libs/1_35_0/libs/math/doc/sf_and_dist/html/math_toolkit/special/sf_beta/beta_derivative.htm
27. Lewin, L. (1981), *Polylogarithms and associated functions*, NORTH HOLLAND, New York, Oxford, 359 p., available at: <https://www.worldcat.org/title/polylogarithms-and-associated-functions/oclc/6666619>
28. Morris, R. (1979), The dilogarithm function of real argument, *Mathematics of Computation*, vol. 33, no. 146, pp. 778–787, available at: <https://www.ams.org/journals/mcom/1979-33-146/S0025-5718-1979-0521291-X/>
29. Lanczos, C. (2010), *Applied Analysis (Dover Books on Mathematics)*, Dover Publications, 576 p., ISBN 048665656X, available at: <https://www.amazon.com/Applied-Analysis-Dover-Books-Mathematics/dp/048665656X>
30. (2024), "Braithwaite Richard, First uses the word «computer»", *The Centre for Computing History*, available at: <https://www.computinghistory.org.uk/det/5829/Richard-Braithwaite-coined-the-phrase-computer/>
31. Klein, G. Y. (1900), *Astronomical evenings*, ZNANIYE, St. Petersburg 448 p., available at: https://old.rusneb.ru/catalog/000199_000009_003692575/viewer/.
32. Encyclopedic Dictionary: in 86 volumes. T. 7. (1892), Calculator / F. A. Brockhaus, I. A. Efron. St. Petersburg: Semenovskaya Typolitografiya, 1892. T. VIIA (14). 487 p., available at: <https://runivers.ru/lib/book3182/10145/>
33. Grier, D. A. (2001), "Human computers: the first pioneers of the information age", *Endeavour*, vol. 25, no. 1, pp. 28–32, doi: [https://doi.org/10.1016/s0160-9327\(00\)01338-7](https://doi.org/10.1016/s0160-9327(00)01338-7)
34. Alic, M. (1986), *Hypatia's Heritage: A History of Women in Science from Antiquity through the Nineteenth Century*, Beacon Press, Boston, 248 p., available at: https://archive.org/details/isbn_9780807067314
35. Grier D. A. (2005), *When computers were human*, Princeton University Press, Princeton 411 p., available at: [https://rybn.org/human_computers/articles/When Computers Were Human - David Alan Grier.pdf](https://rybn.org/human_computers/articles/When%20Computers%20Were%20Human%20-%20David%20Alan%20Grier.pdf)
36. (1865), *Code of states and additional regulations in force under the Ministry of Public Education*, Type. Imp. Academician Sciences, St. Petersburg, 177 p., available at: https://rusneb.ru/catalog/000199_000009_003542645/
37. Gadetska, S., Dubnitskiy, V., Kushneruk, Yu. and Khodyrev, A. (2023), EXCEL-oriented procedures for determining the entropy of a distribution function and its relative parametric sensitivity (elasticity) under the conditions of two-sided re-

restrictions on the range of values of a continuous random variable, *Advanced Information Systems*, vol. 7, no. 3, pp. 26–38, doi: <https://doi.org/10.20998/2522-9052.2023.3.04>

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Gradshteyn I., Ryzhik's I. Table of Integrals, Series, and Products / Daniel Zwillinger and Victor Moll (eds.). Eighth edition. 2014/ 1184 p. URL: <https://www.sciencedirect.com/book/9780123849335/table-of-integrals-series-and-products>
2. Janke E., Emde F., Lösch F. Tafeln Höherer Funktionen. Stuttgart: B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1960. 344 p. URL: <https://www.zvab.com/buch-suchen/titel/tafeln-h%F6herer-funktionen/>
3. Дунаєв А. С. Шличков В. И. Спеціальні функції. Т. 2. Сктеринбург, Уральський університет, 2015. 1322 с. (рос.). URL: <https://urait.ru/book/specialnye-funkcii-v-2-ch-chast-2-514323>
4. Carlson B., Goldstein M. Rational approximation of functions. Los Alamos Scientific Laboratory LA-1943, 1955.384 p. DOI: <https://doi.org/10.2172/4374577>
5. Люстерник Л. А., Червоненкіс О. А. Янпольський А. Р. Математичний аналіз: Обчислення елементарних функцій. НАУКА. 1963. 248 с. (рос.). URL: <https://www.livelib.ru/pubseries/719771-spravochnaya-matematicheskaya-biblioteka>
6. Попов Б. А., Теслер Г. С. Обчислення функцій на ЕОМ. Київ, Наук. думка, 1984. 600 с. (рос.). URL: <https://b.eruditor.link/file/760286/>
7. Luke, Yudell. L. Mathematical function and their approximations, London : Academic Press, 1975. 568 p. URL: <https://www.abebooks.com/9780124599505/Mathematical-Functions-Approximations-Luke-Yudell-0124599508/plp>
8. Цимринг Ш. Е. Спеціальні функції та певні інтеграли, Алгоритми, програми для мікрокалькуляторів, РАДІО І ЗВ'ЯЗОК, 1988. 272 с. (рос.). URL: <https://t-library.net/read/2796>
9. Iske A. Approximation theory and algorithms for data analysis, New York : Springer, 2018. 358 p., URL: <https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-030-05228-7>
10. Каневський Ю. С. Комп'ютерна арифметика. Київ: ДіаСофт, 2015. 231 с. (рос.). URL: https://kanyevsky.kpi.ua/wp-content/uploads/2017/09/Arithmet_A5.pdf
11. Brent Richard P., Zimmermann, P. Modern Computer Arithmetic (Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, Series Number 18), 1st Edition. Cambridge, Cambridge University Press, 2010. 236 p. URL: <https://www.amazon.com/Arithmetic-Cambridge-Monographs-Computational-Mathematics/dp/0521194695>
12. Вирішення математичних завдань на автоматичних цифрових машинах. Програмування для швидкодіючих електронних лічильних машин / Люстерник Л. А., Абрамов А. А., Шестаков В. І., Шура-Бура М. Р. Видавництво Академії Наук, 1952. 327 с. (рос.). URL: <https://www.computer-museum.ru/biblioteka/publication/841/>
13. Бруснецов Н. П., Маслов С. П., Розін В. П. Мала цифрова вобчислювальна машина «СЕТУНЬ». МГУ, 1965. 130 с. (рос.). URL: https://korobkknig.ru/promishl_proizvod/electronika/malaya-cifrovaya-vychislitel'naya-mashina-setun-12534.html
14. Frolov V., Frolov O., Kharchenko V. Classification of Diversity for Dependable and Safe Computing. *CEUR 2362, conference COLINS*. 2019. P. 355–365. URL: <https://ceur-ws.org/Vol-2362/paper32.pdf>
15. Frolov V., Kharchenko V., Orekhov O., Frolov O. Analysis of variant of two-version multi-module web application using cloud services. *Radioelectronic and Computer Systems*. 2020. No. 2. P. 80-91. DOI: <https://doi.org/10.32620/reks.2020.2.07>
16. Abramowitz M., Stegun, I.A. Handbook of Mathematical Functions: With Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, New York: Dover Publications, Inc., 1965. 1046 p. URL: <https://digital.library.unt.edu/ark:/67531/metadc40302/>
17. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы обчислювальної математики. Наука, 1970. 664 с. URL: <http://flibusta.site/b/744699>
18. Jahnke E., Emde F. Funktionentafeln mit Formeln und Kurven, B. G. Teubner, Berlin, 1909, 176 p., URL: <https://www.buchfreund.de/de/d/p/97512494/funktionentafeln-mit-formeln-und-kurven>
19. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика: навч. посібник. Київ: А.С.К. 2006, 648 с., URL: https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/Dubovik_P2_2008_240.pdf
20. Каліткін Н. М. Чисельні методи. Наука, 1978. 512 с. URL: https://books.4nmv.ru/books/chislennyye_metody_2-e_izd_3643177.pdf
21. Задачин В. М., Коношенко І. Г. Чисельні методи : навчальний посібник. Харків : Вид. ХНЕУ, 2014. 180 с., URL: http://kist.ntu.edu.ua/text/PhD/CHM_Zadachin.pdf
22. Чисельні методи: Навчальний посібник / Волонтир Л. О, Зелінська О. В., Потапова Н. А., Чіков І. А. Вінниця: ВНАУ, 2020. 322 с. URL: <http://repository.vsau.org/getfile.php/27703.pdf>
23. Дубницький В. Ю., Кобилін А. М., Кобилін О. А., Кушнерук Ю. І. Excel-орієнтована процедура для обчислення значень спеціальних функцій з інтервальним аргументом, заданим в гіперболічній формі. *Сучасні інформаційні системи*. 2021, т. 5, № 4, С. 116–123. URL: <https://doi.org/10.20998/2522-9052.2021.4.16>
24. Dwight H. B. Tables of integrals and other mathematical data. New York, the Macillan comp., 1957. 198 p. URL: <https://www.amazon.com/Tables-Integrals-Other-Mathematical-Data/dp/0023311703>
25. Wolfram Math World Beta Function. 2024. URL: <https://mathworld.wolfram.com/BetaFunction.html>
26. Derivative of the Incomplete Beta Function. 2024. URL: https://beta.boost.org/doc/libs/1_35_0/libs/math/doc/sf_and_dist/html/math_toolkit/special/sf_beta/beta_derivative.html
27. Lewin L. (1981), Polylogarithms and associated functions, New York, Oxford: NORTH HOLLAND, 359 p., available at: URL: <https://www.worldcat.org/title/polylogarithms-and-associated-functions/oclc/6666619>
28. Morris R. The dilogarithm function of real argument. *Mathematics of Computation*. 1979. Vol. 33, No. 146. P. 778–787. URL: <https://www.ams.org/journals/mcom/1979-33-146/S0025-5718-1979-0521291-X/>
29. Lanczos C. Applied Analysis (Dover Books on Mathematics). Dover Publications, 2010. 576 p. ISBN 048665656X. URL: <https://www.amazon.com/Applied-Analysis-Dover-Books-Mathematics/dp/048665656X>
30. Richard Braithwaite first uses the word «computer». *The Centre for Computing History*: веб-сайт., URL: <https://www.computinghistory.org.uk/det/5829/Richard-Braithwaite-coined-the-phrase-computer/>
31. Клейн Г. Й. Астрономічні вечори. Санкт-Петербург: Знання, 1900. 448 с. (рос.). URL: https://old.rusneb.ru/catalog/000199_000009_003692575/viewer/
32. Енциклопедичний словник: 86 т. 7. Обчислювач / Ф. А. Брокгауз, І. А. Ефрон. Санкт-Петербург: Семеновская Типо-літографія, 1892. Т. VIIA (14). 487 с. (рос.). URL: <https://runivers.ru/lib/book3182/10145/>

33. Grier D. A. Human computers: the first pioneers of the information age. *Endeavour*. 2001. Vol. 25, № 1. P. 28-32. DOI: [https://doi.org/10.1016/s0160-9327\(00\)01338-7](https://doi.org/10.1016/s0160-9327(00)01338-7)
34. Alic M. *Hypatia's Heritage: A History of Women in Science from Antiquity through the Nineteenth Century*. Boston: Beacon Press, 1986. 248 p. URL: https://archive.org/details/isbn_9780807067314
35. Grier D. A. When computers were human: monograph. Princeton University Press, 2005. 411 p. URL: https://rybn.org/human_computers/articles/When_Computers_Were_Human_-_David_Alان_Grier.pdf
36. Звід штатів та додаткових до них постанов, які діють Міністерству народної освіти. Санкт-Петербург: Тип. Імп. Акад. Наук, 1865. 177 с. (рос.). URL: https://rusneb.ru/catalog/000199_000009_003542645/
37. Гадецька С.В., Дубницький В.Ю., Кушнерук Ю.І., Ходирев О.І. Excel-орієнтовані процедури визначення ентропії функції розподілу та її відносної параметричної чутливості (еластичності) в умовах двосторонніх обмежень на область значень неперервної випадкової величини. *Сучасні інформаційні системи*. 2023, т. 7, № 3. С. 26–38, doi: <https://doi.org/10.20998/2522-9052.2023.3.04>

Received (Надійшла) 15.05.2024

Accepted for publication (Прийнята до друку) 24.07.2024

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ / ABOUT THE AUTHORS

- Гадецька Світлана Вікторівна** – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, Харків, Україна;
Svitlana Gadetska – PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of Department of Higher Mathematics of Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv, Ukraine;
 e-mail: svgadetska@ukr.net; ORCID Author ID: <https://orcid.org/0000-0002-9125-2363>;
 Scopus ID: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57203515764>.
- Дубницький Валерій Юрійович** – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, старший науковий співробітник Харківського навчально-наукового інституту “Каразінський банківський інститут” Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна, Харків, Україна;
Valeriy Dubnitskiy – PhD in Engineering Senior Researcher Senior Researcher of “Karazin Banking Institute” of V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine;
 e-mail: dubnitskiy@gmail.com; ORCID Author ID: <https://orcid.org/0000-0003-1924-4104>;
 Scopus ID: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=58698004400>.
- Кушнерук Юрій Іонович** – кандидат технічних наук, доцент, старший викладач Інституту цивільної авіації Харківського національного університету Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків, Україна;
Yuri Kushneruk – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Senior Lecturer of Civil Aviation Institute of Ivan Kozhedub Kharkiv National Air Force University, Kharkiv, Ukraine;
 e-mail: kyshneryk_ui@ukr.net; ORCID Author ID: <https://orcid.org/0000-0001-5844-7137>;
 Scopus ID: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=36572023100>.
- Ходирев Олександр Іванович** – старший викладач Харківського навчально-наукового інституту “Каразінський банківський інститут” Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна, Харків, Україна;
Alexander Khodyrev – Senior Lecturer of “Karazin Banking Institute” of V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine;
 e-mail: khodyrevmjk3758@gmail.com; ORCID Author ID: <https://orcid.org/0000-0001-9871-9440>;
 Scopus ID: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57192383812>.
- Черепнов Ігор Аркадійович** – кандидат технічних наук, старший науковий співр., доцент, доцент кафедри мехатроніки, безпеки життєдіяльності та управління якістю, Державний біотехнологічний університет, Харків, Україна;
Ihor Cherepnov – Candidate of Technical Sciences, senior researcher, Associate Professor, Department of Mechatronics, life safety and Quality Management, State Biotechnological University, Kharkiv, Ukraine;
 e-mail: voenpred314@ukr.net; ORCID Author ID: <https://orcid.org/0000-0003-2421-6503>;
 Scopus ID: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57200816748>

**Excel-oriented calculator for finding the values of some special functions
of mathematical and theoretical physics**

Svitlana Gadetska, Valeriy Dubnitskiy, Yuri Kushneruk, Alexander Khodyrev, Ihor Cherepnov

Abstract. The goal of the work. Development of an EXCEL-oriented calculator for finding the values of special functions of mathematical and theoretical physics. **Research subject:** special functions of mathematical and theoretical physics. **Research method:** numerical methods for obtaining values of special functions. **The obtained results.** EXCEL-oriented algorithms for calculating special functions are proposed: for direct and inverse hyperbolic functions, Bessel functions, complete and incomplete gamma functions, polygamma functions, complete and incomplete beta functions and their partial derivatives, Fresnel integrals, integral circular and hyperbolic trigonometric functions, integral exponent, integral logarithm, dilogarithm, Clausen function, and associated Clausen function, Lobachevsky function, integral secant function (Sievert function). All proposed algorithms use only numerical integration operations (rectangle method) and calculations of finite sums of functional series. The ways for adaptively determining the number of intervals during numerical integration that necessary to achieve the accepted calculation accuracy are described. For improper integrals, a procedure for replacing them with ordinary definite integrals that ensure calculations with a given accuracy is proposed. The similar procedures for determining the number of terms in the n-th partial sum of a functional series with an infinite number of terms are proposed. It is shown that the proposed algorithms provide calculation accuracy no less than the Mathcad package. An algorithm for calculating function values using Chebyshev polynomials is proposed and implemented. The algorithm can be used to calculate the values of an arbitrary continuous function specified by the user.

Keywords: calculation methods; special functions; Chebyshev polynomials.