

# Information systems modeling

УДК 517.9:519.6

doi: <https://doi.org/10.20998/2522-9052.2024.1.02>С. В. Гадецька<sup>1</sup>, В. Ю. Дубницький<sup>2</sup>, Ю. І. Кушнерук<sup>3</sup>, Ю. Л. Поночовний<sup>4</sup>, О. І. Ходирев<sup>2</sup><sup>1</sup> Харківський національний автомобільно-дорожній університет, Харків, Україна<sup>2</sup> ННІ “Каразінський банківський інститут” ХНУ імені В. Н. Каразіна, Харків, Україна<sup>3</sup> Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків, Україна<sup>4</sup> Полтавський державний аграрний університет, Полтава, Україна

## МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ОБМІНУ В БАГАТОКОМПОНЕНТНИХ СЕРЕДОВИЩАХ З УРАХУВАННЯМ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ ДАНИХ

**Анотація. Мета дослідження.** Пропозиції до методів розв’язання систем лінійних однорідних і неоднорідних диференціальних рівнянь із сталими та змінними коефіцієнтами, визначеними в інтервальному вигляді і призначеними для моделювання процесів обміну в багатокомпонентних середовищах. **Предмет дослідження:** системи лінійних однорідних і неоднорідних диференціальних рівнянь із сталими та змінними коефіцієнтами, визначеними в інтервальному вигляді. **Метод дослідження:** інтервальный аналіз. **Отримані результати.** Розглянуто системи лінійних однорідних та неоднорідних диференціальних рівнянь, які застосовують при моделюванні процесів обміну в багатокомпонентних середовищах, наприклад, в задачах хімічної кінетики, матеріалознавства, теорії марковських процесів. Для отримання розв’язку цих рівнянь застосовано спеціалізовані калькулятори аналітичних перетворень та проведено їх тестування. Для чисельного аналізу систем диференціальних рівнянь використовували систему Matlab (розв’язувач ODE 15s). Показано, що застосування інтервальних методів чисельного аналізу на початковому етапі моделювання систем має деякі переваги перед ймовірнісними тому, що не вимагають знання законів розподілу результатів вимірювань параметрів стану системи та їх похибок. Показано, що існуючі методи розв’язання систем лінійних диференціальних рівнянь можна розподілити на дві групи. Загальним для цих груп служить використання інтервального розширення класичних методів для розв’язання диференціальних рівнянь, заданих в інтервальному вигляді. Відмінність між цими двома групами методів наступна. Методи першої групи можуть бути використані для всіх типів диференціальних рівнянь, але вимагають створення спеціального програмного забезпечення. Особливість методів другої групи в тому, що їх можна використовувати для розв’язання рівнянь в аналітичному вигляді або використовуючи пакети чисельного аналізу. Застосування методів другої групи показано на прикладі розв’язання системи диференціальних рівнянь, коефіцієнти яких визначено в інтервальному вигляді. Система цих рівнянь призначена для моделювання процесів обміну з зовнішнім середовищем елементів моделі конкретної фізичної системи. У тому випадку, коли коефіцієнти цих рівнянь є змінними величинами, застосовано їх кусково-сталу апроксимацію та наведено критерій, який визначає можливість її застосування. Запропонована в даному повідомленні методика може бути застосована для розв’язання систем лінійних однорідних і неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими та змінними коефіцієнтами, якщо вони задані повільно змінними функціями. У тому випадку, коли коефіцієнти рівнянь визначено в інтервальному вигляді, методика дозволяє отримувати їх розв’язок також в інтервальному вигляді і не вимагає для цього створення спеціального програмного забезпечення.

**Ключові слова:** системи лінійних диференціальних рівнянь; змінні коефіцієнти систем лінійних диференціальних рівнянь; інтервальный аналіз; повільно змінні функції; індекс Джині.

### Вступ

Процеси обміну матеріальними ресурсами в багатокомпонентних середовищах або інформацією в системах складної структури можна віднести до одного з найважливіших завдань математичного моделювання.

Розглянемо систему лінійних однорідних диференціальних рівнянь (СЛОДР) вигляду:

$$\frac{dX}{dt} = AX, \quad (1)$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad (2)$$

де

$$X = [x_1, \dots, x_n]^T; \quad \frac{dX}{dt} = \left[ \frac{dx_1}{dt}, \dots, \frac{dx_n}{dt} \right]^T$$

$$\text{або} \quad \frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^n a_{ik} x_k, \quad \forall i = [1, n]. \quad (3)$$

Початкові умови системи (1) в загальному випадку мають вигляд:

$$X(t_0) = X_0. \quad (4)$$

В рамках даної роботи використовували наступні варіанти початкових умов:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & X(t_0) = [x_{10}, \dots, x_{n0}]^T; \\ \text{б)} \quad & x_{10} = 1, x_{20} = 0, \dots, x_{n0} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Вибір виду співвідношення, яке визначає початкові умови, залежить від фізичного змісту задачі. Наприклад, в задачах теорії надійності найчастіше використовують варіант б). Методи розв’язання системи (1) розглянуто в багатьох підручниках із вищої математики, наприклад, в [1].

При моделюванні процесів обміну в багатокомпонентних середовищах співвідношення (1)...(5), як правило, доповнюються обмеженнями вигляду:

$$\sum_{i=1}^n x_i = N, \sum_{i=1}^n x_i = 1. \quad (6)$$

Надалі, без обмеження узагальненості приймемо, що:

$$x_n = 1 - x_1 - x_2 - \dots - x_k - \dots - x_{n-1}. \quad (7)$$

Використовуючи (6) представимо (3) у вигляді:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n-1} a_{ik} x_k + a_{in} (1 - x_1 - x_2 - \dots - x_k - \dots - x_{n-1}), \quad i = \overline{1, n}. \quad (8)$$

У цьому випадку співвідношення (3) буде виглядати так:

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{k=1}^{n-1} (a_{ik} - a_{in}) x_k + a_{in}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (9)$$

Отже, обмеження вигляду (6) переводять СЛОДР, яка визначена співвідношенням (1), в систему лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь. Вибір типу обмежень залежить від фізичного змісту задачі. Обмеження (6) використовують, як правило, при моделюванні процесів обміну в закритих системах.

Застосування співвідношень (1)...(6) для розв'язання завдань хімічної кінетики розглянуто в [2, 3]. В цьому випадку матрицю  $A$  у співвідношенні (1) можна розглядати як стехіометричну, вектор  $X = [x_1, \dots, x_n]^T$  відповідає кількості діючих речовин.

Застосування співвідношень (1)...(6) для розв'язання задач матеріалознавства розглянуто в [4]. В цьому випадку матрицю  $A$  у співвідношенні (1) можна розглядати як матрицю інтенсивностей переходів структурних елементів матеріалу з одного різновиду до іншого. Вектор  $X = [x_1, \dots, x_n]^T$  визначає кількість кожного зі структурних елементів в моделі матеріалу.

Застосування співвідношень (1)...(6) для аналізу марківських ланцюгів з дискретними станами і неперервним часом розглянуто в [5, 6]. У цьому випадку матрицю  $A$  у співвідношенні (1) можна розглядати як матрицю інтенсивностей переходів з одного стану системи в інший. Вектор  $X = [x_1, \dots, x_n]^T$  відповідає ймовірності перебування системи в одному з її можливих станів. Виходячи з фізичного змісту цих задач необхідно окрім обмежень (6) ввести умову невід'ємності змінних:

$$\forall x_i \geq 0, \forall i = [1, n]. \quad (10)$$

В роботі [5] при виконанні обчислень використано спеціалізовані калькулятори, призначені для аналітичного розв'язання систем однорідних та неоднорідних диференціальних рівнянь, які розміщено на наступних сайтах:

- калькулятор типу I: <https://mathdf.com/dif/ru/>
- калькулятор типу II:

<https://www.kontrolnaya-rabota.ru/s/equal-many/system-diff/>

Відмінність між цими калькуляторами полягає в тому, що калькулятор типу I повертає загальний і частинний розв'язок, а калькулятор типу II повертає тільки загальний розв'язок. Розв'язання контрольної системи рівнянь аналітичним методом наведено в [1]. Порівняння розв'язань СЛОДР, отриманих калькуляторами типу А і типу Б, наведено в табл. 1 і табл. 2.

Таблиця 1 – Розв'язок контрольної СЛОДР аналітичним методом

| Контрольна СЛОДР   | Загальний розв'язок  | Частинний розв'язок  |
|--|--|--|
| $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x - 2y \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y \end{cases}$ | $\begin{cases} x(t) = C_1 e^t + 2C_2 e^{2t}; \\ y(t) = -C_1 e^t - 3C_2 e^{2t} \end{cases}$ | $\begin{cases} x(t) = e^t - 2e^{2t}; \\ y(t) = -e^t + 3e^{2t} \end{cases}$ |
| $x(0) = -1, y(0) = 2$  |  |  |

Таблиця 2 – Розв'язок контрольної СЛОДР спеціалізованими калькуляторами

| Загальний розв'язок   | Частинний розв'язок   |
|---|---|
| <b>Калькулятор типу I</b>   |   |
| $\begin{cases} x(t) = -2C_1 e^{2t} - C_2 e^t \\ y(t) = 3C_1 e^{2t} + C_2 e^{2t} \end{cases}$        | $\begin{cases} x(t) = -2e^{2t} + e^t \\ y(t) = 3e^{2t} - e^t \end{cases}$ |
| <b>Калькулятор типу II</b>  |   |
| $\begin{cases} x(t) = -C_1 e^t - \frac{2}{3} C_2 e^{2t} \\ y(t) = C_1 e^t + C_2 e^{2t} \end{cases}$ | $\begin{cases} x(t) = e^t - 2e^{2t} \\ y(t) = -e^t + 3e^{2t} \end{cases}$ |

З наведених результатів виходить, що калькулятори вказаних типів можуть бути використані при виконанні подальших обчислень. Найбільш придатним є калькулятор типу А, який повертає не тільки загальний розв'язок диференціального рівняння, але і його частинний розв'язок.

Відповідність розв'язків системи (1) процесам, які вони моделюють, залежить від правильного визначення чисельних значень елементів матриці  $A$  за результатами експериментальних спостережень. Ця процедура отримала назву ідентифікації системи. Сучасний стан цих методів детально розглянутий в [7–9]. Описані в роботі [7] методи вимагають знання законів розподілу результатів вимірювань параметрів стану системи та їх похибок. Це призводить до збільшення обсягу експериментальних досліджень і ускладнення обчислювальних процесів. Альтернативою такому підходу може бути використання методів інтервального аналізу.

**Аналіз літератури.** Визначення множини інтервальних чисел, їх властивості та способи виконання основних арифметичних дій з ними описано в [10]. Правила виконання цих операцій,

залежно від форми подання інтервальних чисел, наведено в [11, 17]. Визначення поняття межі та похідної функції інтервального аргументу, а також відомості, необхідні для виконання операцій диференціювання та інтегрування функцій дійсного інтервального аргументу наведено в [12, 13]. Аналіз тотожності та відмінності цих визначень виходить за рамки даного повідомлення. Слід зазначити, що визначення похідної функції інтервального аргументу, яке наведено в [12], при розгляді методів розв'язання інтервальних диференціальних рівнянь не використано. Визначення, наведене в [13], використано в [14] при описі методу розв'язання інтервального диференціального рівняння.

Методи розв'язання інтервальних диференціальних рівнянь можна умовно розділити на дві групи. До першої групи входять методи, які використовують інтервальні розширення класичних чисельних методів розв'язання диференціальних рівнянь, наприклад метод Ейлера, методи Рунге-Кутта, подання розв'язку у вигляді ряду Тейлора. Докладні відомості про ці та інші аналогічні методи подано в [15–17]. В [18] було відзначено явище, яке отримало назву ефекту Мура (wrapping effect). Зміст цього ефекту у тому, що при проведенні обчислень різко зростає ширина інтервального розв'язку системи (1). В [17] відмічено, що це явище пов'язане тільки з внутрішніми властивостями наближених методів розв'язання інтервальних диференціальних рівнянь, незалежно від похибок чисельних розв'язків.

До другої групи входять методи, які використовують подання інтервальних розв'язків диференціальних рівнянь у вигляді функцій – обмежень дійсного аргументу, які є розв'язками диференціального рівняння, представленого в традиційному вигляді. Іноді ці методи називають методами визначення двосторонніх граничних функцій  $f_1$  і  $f_2$ . Застосування цих методів вимагає уточнення поняття інтервального числа.

В [19] приведено наступне визначення інтервального числа  $A$ :

$$A = [a_1, a_2] = \{t | a_1 \leq t \leq a_2\}, \quad a_1, a_2 \in \mathbf{R}, \quad (11)$$

де  $\mathbf{R}$  – множина дійсних чисел. Для зручності подальших обчислень розглянемо можливі розташування меж інтервалу  $A = [a_1, a_2]$ :

$$a_1, a_2 \in \mathbf{R}_+; \quad a_1, a_2 \in \mathbf{R}_-; \quad (a_1 \in \mathbf{R}_-, \quad a_2 \in \mathbf{R}_+). \quad (12)$$

Зважаючи на (12) співвідношення (11) набуде вигляду:

$$[A] = \begin{bmatrix} \min(\text{sign}(a_1) \cdot |a_1|, \text{sign}(a_2) \cdot |a_2|) \\ \max(\text{sign}(a_1) \cdot |a_1|, \text{sign}(a_2) \cdot |a_2|) \end{bmatrix}. \quad (13)$$

При визначенні граничних функцій  $f_1$  і  $f_2$  для інтервальної функції  $[F(x, k)]$  можливі такі варіанти її подання:

$$[F(x, k)] = [f_1([x], k), f_2([x], k)]; \quad (14)$$

$$[F(x, k)] = [f_1(x, [k]), f_2(x, [k])]; \quad (15)$$

$$[F(x, k)] = [f_1([x], [k]), f_2([x], [k])]. \quad (16)$$

Для співвідношення (15) один із способів побудови граничних функцій викладено в [12]. Припустимо, що співвідношення (15) має вигляд:

$$[F(x)] = \sum_{i=1}^m [a_{1i}, a_{2i}] x^i. \quad (17)$$

Тоді двосторонні граничні функції  $f_1$  і  $f_2$  можна представити у вигляді рівностей:

$$f_1(x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^m a_{1i} x^i, & \text{якщо } x \geq 0; \\ \sum_{i=1}^m (a_{1i} \theta(i) + a_{2i} \gamma(i)) x^i, & \text{якщо } x < 0 \end{cases} \quad (18)$$

$$f_2(x) = \begin{cases} \sum_{i=0}^m a_{2i} x^i, & \text{якщо } x \geq 0; \\ \sum_{i=1}^m (a_{1i} \gamma(i) + a_{2i} \theta(i)) x^i, & \text{якщо } x < 0, \end{cases} \quad (19)$$

$$\gamma_i = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i = 2l, l = 1, 2, \dots \\ 1, & \text{якщо } i = 2l + 1, l = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (20)$$

$$\theta_i = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = 2l, l = 1, 2, \dots \\ 0, & \text{якщо } i = 2l + 1, l = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (21)$$

Для співвідношення (16) розглянемо спосіб побудови граничних функцій, викладений в [17]. Для цього співвідношення (11) представимо у вигляді:

$$[A] = [a_1, a_2] = [\underline{a}, \bar{a}]. \quad (22)$$

Оскільки  $dx/dt = \dot{x}$ , то, зважаючи на (22), співвідношення (3) представимо у такому вигляді:

$$[\dot{x}_i, \bar{x}_i] = \sum_{k=1}^n [\underline{a}_{ik}, \bar{a}_{ik}] \cdot [x_k, \bar{x}_k], \quad i, k = 1, 2, \dots, n. \quad (23)$$

Правила для визначення нижньої та верхньої границі інтервальних доданків в співвідношенні (23) наведено в табл. 3, табл. 4, табл. 5.

Таблиця 3 – Визначення доданків для обчислення нижньої та верхньої граничних функцій відповідно до роботи [17]\*

| $U = \text{sign}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}(a_{ik} x_k)\right)$ | Доданок граничної функції            |                                 |
|---|--------------------------------------|---------------------------------|
|   | нижньої                              | верхньої                        |
| $U = -1$  | $-\bar{a}_{ik} \underline{x}_k$      | $-\underline{a}_{ik} \bar{x}_k$ |
| $U = 1$   | $\underline{a}_{ik} \underline{x}_k$ | $\bar{a}_{ik} \bar{x}_k$        |

\*) В табл. 3 прийнято, що  $i, k = 1, 2, \dots, n$ .

В [24] запропоновано спосіб обчислення нижньої і верхньої граничних функцій, приведений в табл. 4.

Таблиця 4 – Визначення доданків для обчислення нижньої та верхньої граничних функцій відповідно до роботи [24]\*

| $U = \text{sign}\left(\frac{\partial}{\partial a_{ik}}(a_{ik}x_k)\right)$ | Доданок граничної функції |              |
|---|---------------------------|--------------|
|   | нижньої                   | верхньої     |
| $U = -1$  | $-a_{ik}x_k$              | $-a_{ik}x_k$ |
| $U = 1$   | $a_{ik}x_k$               | $a_{ik}x_k$  |

\*) В табл. 4 прийнято, що  $i, k = 1, 2, \dots, n$ .

Приймаючи до уваги співвідношення (10) в даній роботі запропоновано більш простий спосіб обчислення нижньої та верхньої граничних функцій, приведений в табл. 5.

Таблиця 5 – Визначення доданків для обчислення нижньої та верхньої граничних функцій\*

| $U = \text{sign}(a_{ik}x_k)$ | Доданок граничної функції |              |
|------------------------------|---------------------------|--------------|
|                              | нижньої                   | верхньої     |
| $U = -1$                     | $-a_{ik}x_k$              | $-a_{ik}x_k$ |
| $U = 1$                      | $a_{ik}x_k$               | $a_{ik}x_k$  |

\*) В табл. 5 прийнято, що  $i, k = 1, 2, \dots, n$ .

Початкові умови для (23) визначають як:

$$x_k(0) = x_{k0}; \bar{x}_k(0) = \bar{x}_{k0}, k = 1, 2, \dots, n. \quad (24)$$

Порівнюючи ці дві групи методів можна відзначити наступне. Загальним для цих груп служить використання інтервального розширення класичних методів для розв'язання диференціальних рівнянь, заданих в інтервальному вигляді. Відмінність між цими двома групами методів наступна. Методи першої групи можуть бути використані для всіх типів диференціальних рівнянь, але вимагають створення спеціального програмного забезпечення. Особливість методів другої групи в тому, що їх можна використовувати для розв'язання рівнянь в аналітичному вигляді або застосовуючи пакети чисельного аналізу.

В процесах обміну, які відбуваються в багатокомпонентних середовищах, найчастіше замість співвідношення (1) має місце співвідношення:

$$\frac{dX}{dt} = A(t)X. \quad (25)$$

Тобто більш коректно буде розглядати систему лінійних диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами. Основні відомості про властивості таких рівнянь та особливості їх розв'язання наведено в [23].

Автори даного повідомлення в доступній для них літературі не змогли знайти відомості стосовно наближених методів розв'язування СЛОДУ із змінними коефіцієнтами, визначеними в інтервальному вигляді.

**Мета дослідження.** Пропозиції до методів розв'язання систем лінійних однорідних і

неоднорідних диференціальних рівнянь із сталими та змінними коефіцієнтами, визначеними в інтервальному вигляді та призначеними для моделювання процесів обміну в багатокомпонентних середовищах.

### Отримані результати

Метод розв'язання задач, які сформульовано у даному повідомленні, розглянемо на прикладі побудови моделі взаємодії багатокомпонентної фізичної структури із зовнішнім середовищем [20, 21]. Для моделювання використано уявлення про структуру об'єкта дослідження, яке засновано на угрупованні його компонентів у блоки за ознакою спільності функціональних властивостей. При побудові моделі прийняті такі припущення:

- у кожному елементарному об'ємі присутні всі компоненти  $V_i, i=1, 2, 3, 4$ , розташовані рівномірно по всіх координатних осях у співвідношенні, яке відповідає «в середньому» співвідношенню структурних компонентів у реальному матеріалі;

- на всьому інтервалі функціонування моделі виконується умова:

$$\sum_{i=1}^4 V_i = 100; \quad (26)$$

- всі компоненти  $V_i, i=1, 2, \dots, 4$ , що знаходяться в одиничному об'ємі, мають рівний доступ для взаємодії із зовнішнім середовищем і рештою елементів моделі;

- зв'язок кожного компоненту  $V_i$  з елементом  $V_j, j=1, \dots, 4$  неперервний. Відносини між елементами представлено у вигляді зваженого орграфа. Вага дуги  $\alpha_{sj}$  дорівнює інтенсивності переходу елементу  $V_i$  в елемент  $V_j$  в одиницю часу. Аналіз фізичного змісту моделі наведено в [20, 21].

В рамках даної роботи розглянемо процеси обміну двох типів: типу А, для якого відносини між елементами моделі показано на рис. 1 та типу Б, для якого відносини між елементами моделі показано на рис. 2. Метод отримання диференціальних рівнянь для опису цих процесів наведено в [4].

Система диференціальних рівнянь, яка моделює процес обміну типу А, має вигляд:

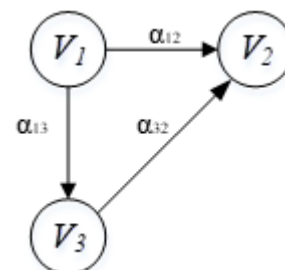


Рис. 1. Граф відносин між елементами моделі при моделюванні процесів обміну типу А, за умови, що  $V_1 + V_2 + V_3 = 100$

(Fig. 1. The graph of relationships between model elements in the simulation of exchange processes of type A, provided that  $V_1 + V_2 + V_3 = 100$ )

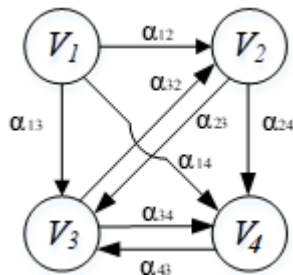


Рис. 2. Граф відносин між елементами моделі при моделюванні процесів обміну типу Б за умови, що  $V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 100$

(Fig. 2. The graph of relationships between model elements in the simulation of exchange processes of type B, provided that  $V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 100$ )

$$\begin{cases} \frac{dV_2}{dt} = \alpha_{12} - \alpha_{12}V_2 - (\alpha_{12} - \alpha_{32})V_3; \\ \frac{dV_3}{dt} = \alpha_{13} - \alpha_{13}V_2 - (\alpha_{13} + \alpha_{32})V_3. \end{cases} \quad (27)$$

Початкові умови для (27) такі:

$$V_2(0) = V_{20}; V_3(0) = V_{30}.$$

Система диференціальних рівнянь, яка моделює процес обміну процесу типу Б, має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dV_2}{dt} = \alpha_{12} - \left( \alpha_{12} + (\alpha_{23} + \alpha_{24})V_2 - (\alpha_{12} - \alpha_{32})V_3 \right) - \alpha_{24}V_4; \\ \frac{dV_3}{dt} = \alpha_{13} - \left( (\alpha_{13} + (\alpha_{32} + \alpha_{34}))V_3 + (\alpha_{13} - \alpha_{23})V_2 + (\alpha_{13} - \alpha_{43})V_4 \right); \\ \frac{dV_4}{dt} = \alpha_{14} - \left( (\alpha_{14} - \alpha_{24})V_2 + (\alpha_{14} - \alpha_{34})V_3 + (\alpha_{14} + \alpha_{43})V_4 \right). \end{cases} \quad (28)$$

Початкові умови для (28) такі:

$$V_2(0) = V_{20} \quad V_3(0) = V_{30} \quad V_4(0) = V_{40}. \quad (29)$$

У зв'язку з особливостями подання даних в програмних продуктах, а саме: MATLAB, DERIVE, STATGRAPHICS, які було використано під час розв'язування систем рівнянь (27) і (28), виконана заміна змінних, подана в табл. 6 і 7.

Таблиця 6 – Таблиця заміни змінних в системі диференціальних рівнянь яка моделює процеси обміну типу А

| Позначення, прийняті у співвідношенні |              |                                  |           |
|---------------------------------------|--------------|----------------------------------|-----------|
| (27)                                  | (30)         | (27)                             | (30)      |
| $V_2$                                 | $x$          | $\alpha_{12}V_2$                 | $a_{11}x$ |
| $V_3$                                 | $y$          | $(\alpha_{12} - \alpha_{32})V_3$ | $a_{12}y$ |
| $V_2(0) = V_{20}$                     | $x(0) = x_0$ | $\alpha_{13}$                    | $b$       |
| $V_3(0) = V_{30}$                     | $y(0) = y_0$ | $\alpha_{13}V_2$                 | $a_{21}x$ |
| $\alpha_{12}$                         | $a$          | $(\alpha_{13} + \alpha_{32})V_3$ | $a_{22}y$ |

Приймаючи до уваги заміну змінних, яка показана в табл. 6, отримаємо замість (27) співвідношення:

$$\begin{cases} \dot{x} = a - a_{11}x - a_{12}y; \\ \dot{y} = b - a_{21}x - a_{22}y; \\ x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0. \end{cases} \quad (30)$$

Таблиця 7 – Таблиця заміни змінних в системі диференціальних рівнянь яка моделює процеси обміну типу Б

| Позначення, прийняті у співвідношенні          |              |  |           |
|--|--------------|--|-----------|
| (28)   | (31)         | (28)   | (31)      |
| $V_2$  | $x$          | $\alpha_{24}V_4$                               | $a_{13}z$ |
| $V_3$  | $y$          | $\alpha_{13}$                                  | $g$       |
| $V_4$  | $z$          | $(\alpha_{13} - \alpha_{23})V_2$               | $a_{21}x$ |
| $V_2(0) = V_{20}$                              | $x(0) = x_0$ | $\alpha_{13} + (\alpha_{32} + \alpha_{34})V_3$ | $a_{22}y$ |
| $V_3(0) = V_{30}$                              | $y(0) = y_0$ | $(\alpha_{13} - \alpha_{43})V_4$               | $a_{23}z$ |
| $V_4(0) = V_{40}$                              | $z(0) = z_0$ | $\alpha_{14}$                                  | $h$       |
| $\alpha_{12}$                                  | $c$          | $(\alpha_{14} - \alpha_{24})V_2$               | $a_{31}x$ |
| $\alpha_{12} + (\alpha_{23} + \alpha_{24})V_2$ | $a_{11}x$    | $(\alpha_{14} - \alpha_{34})V_3$               | $a_{32}y$ |
| $(\alpha_{12} - \alpha_{32})V_3$               | $a_{12}y$    | $(\alpha_{14} + \alpha_{43})V_4$               | $a_{33}z$ |

Приймаючи до уваги заміну змінних, яка показана в табл. 7, отримаємо замість (28) співвідношення:

$$\begin{cases} \dot{x} = c - a_{11}x - a_{12}y - a_{13}z; \\ \dot{y} = g - a_{21}x - a_{22}y - a_{23}z; \\ \dot{z} = h - a_{31}x - a_{32}y - a_{33}z; \\ x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0, \quad z(0) = z_0. \end{cases} \quad (31)$$

В [4] надано результати ідентифікації моделей (27) і (28) за результатами експериментальних даних, наведених в [21]. Її результати використано для визначення величин інтервалів можливих значень коефіцієнтів моделей (30) і (31). При обчисленні значень величин, які вказано в (22), використано інтервальні числа, представлені в системі ЦЕНТР-РАДІУС. Відповідно до [10] інтервальне число в системі ЦЕНТР-РАДІУС визначають як впорядковану пару дійсних чисел:

$$\langle A \rangle = \langle a, r_a \rangle, \quad (32)$$

де 
$$a = \frac{a_1 + a_2}{2}; \quad r_a = \frac{a_2 - a_1}{2}. \quad (33)$$

Надалі будемо приймати, що  $|r_a| < |a|$ . Інші випадки в роботі не розглянуто, тому що вони не відповідали фізичному змісту задач, які розв'язували автори даного повідомлення. Операції додавання та віднімання в такому разі виконують згідно з такими правилами:

$$A + B = \langle a + b, r_a + r_b \rangle; \quad (34)$$

$$A - B = \langle a - b, r_a + r_b \rangle. \quad (35)$$

Відповідно до умови, визначеної в [11], межі інтервалів, які визначають дані числа, утворені обчислювальними помилками, похибками вимірювань або неповним знанням області зміни фізичної величини, яка підлягає дослідженню.

Внаслідок цього повинні виконуватися нерівності:

$$a \geq r_a \geq 0, \quad b \geq r_b \geq 0. \quad (36)$$

У протилежному випадку будемо вважати, що задача в межах наших уявлень про об'єкт дослідження фізичного змісту не має. В табл. 8 наведено межі інтервалів параметрів в системі диференціальних рівнянь яка моделює процеси обміну типу А. Для їх обчислення використано співвідношення (34), (35).

Таблиця 8 – Межі інтервалів параметрів в системі диференціальних рівнянь яка моделює процеси обміну типу А

| Коефіцієнти моделі (27) | Інтервальні характеристики коефіцієнтів моделі (27) |                 |                  |            |
|-------------------------|---|-----------------|------------------|------------|
|                         | Ліва межа   | Центр інтервалу | Радіус інтервалу | Права межа |
| $\alpha_{12}$           | 1,9   | 2,0             | 0,1              | 2,1        |
| $\alpha_{32}$           | 2,4   | 2,5             | 0,1              | 2,6        |
| $\alpha_{13}$           | 2,8   | 3,0             | 0,2              | 3,2        |

Для подальшого отримання результатів розглянемо співвідношення вигляду:

$$D = (-1) \cdot [A] = (-1, -1) \cdot (-a_1, -a_2) = a_1, a_2 \in \mathbf{R}; \quad |a_1| > |a_2|. \quad (37)$$

Використовуючи [10] отримаємо такий вираз:

$$D = (-1) \cdot [A] = (-1, -1) \cdot (-a_1, -a_2) = (a_1, a_2, a_1, a_2) = U. \quad (38)$$

Отже  $D = (\min U, \max U) = (a_2, a_1). \quad (39)$

Розглянемо використання запропонованої методики для визначення нижньої і верхньої межі інтервального розв'язку системи (27). Використовуючи (30) і табл. (5, 6, 8) отримаємо в інтервальному вигляді системи диференціальних рівнянь, призначених для визначення обчислення нижньої і верхньої граничних функцій, які виникають при моделювання процесів обміну типу А. Отримані рівняння наведено в табл. 9. Необхідні для цього експериментальні дані і результати їх обробки наведено в [20, 21]. Для розв'язання цих систем використовували калькулятор типу I: <https://mathdf.com/dif/ru/>. Результати розв'язання цих систем наведено в табл. 10.

Чисельні значення коефіцієнтів, які наведено в табл. 10 визначено в табл. 11.

Приймаючи до уваги зауваження до рис. 1, умову нормування (26) та табл. 6 можна визначити, що для даної моделі має місце співвідношення:

$$V_1(t) = 100 - x(t) - y(t). \quad (40)$$

Для моделювання в інтервальному вигляді процесів обміну типу Б використано співвідношення (31) та рівняння, які наведено в табл. 12.

Таблиця 9 – Системи диференціальних рівнянь для моделювання процесів обміну типу А

| Система диференціальних рівнянь | Нижня границя інтервалу  | Центр інтервалу  | Верхня границя інтервалу   |
|---------------------------------|--|--|--|
| Загальний випадок               | $\begin{cases} \dot{x} = \underline{a} - \underline{a}_{11}x + \underline{a}_{12}y; \\ \dot{y} = \underline{b} - \underline{a}_{21}x - \underline{a}_{22}y; \\ t(0) = 0, \quad x(0) = \underline{x}_0; \quad y(0) = \underline{y}_0 \end{cases}$ | $\begin{cases} \dot{x} = a - a_{11}x + a_{12}y; \\ \dot{y} = b - a_{21}x - a_{22}y; \\ t(0) = 0, \quad x(0) = x_0; \quad y(0) = y_0 \end{cases}$ | $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = \bar{a} - \bar{a}_{11}x + \bar{a}_{12}y; \\ \dot{\bar{y}} = \bar{b} - \bar{a}_{12}x - \bar{a}_{22}y; \\ t(0) = 0, \quad x(0) = \bar{x}_0; \quad y(0) = \bar{y}_0 \end{cases}$ |
| Частинний випадок               | $\begin{cases} \dot{x} = 1,9 - 2,1x + 0,25y; \\ \dot{y} = 2,85 - 3,15x - 5,8y; \\ t(0) = 0, \quad x(0) = 53,2; \\ y(0) = 11,4 \end{cases}$   | $\begin{cases} \dot{x} = 2,0 - 2,0x + 0,5y; \\ \dot{y} = 3,0 - 3,0x - 5,5y; \\ t(0) = 0, \quad x(0) = 55,2; \\ y(0) = 12,4 \end{cases}$          | $\begin{cases} \dot{\bar{x}} = 2,1 - 1,9x + 0,75y \\ \dot{\bar{y}} = 3,15 - 2,85x - 5,2y \\ t(0) = 0, \quad x(0) = 57,2; \\ y(0) = 13,4 \end{cases}$   |

Таблиця 10 – Розв'язання систем диференціальних рівнянь для моделювання процесів обміну типу А

| Граничні функції інтервалу | Розв'язання систем диференціальних рівнянь  |
|----------------------------|---|
| Нижня границя інтервалу    | $x = 5(C_1 \exp(\beta \cdot t) + C \exp(-\gamma \cdot t)); \quad y = C_1 [\sqrt{1054} \exp(\sqrt{1,054} - \exp(\beta t))] - 38C \exp(-\lambda t)$                               |
| Центр інтервалу            | $x = -C_1 \exp(-\beta \cdot t) - C \exp(-\gamma \cdot t); \quad y = C_1 \exp(-\beta \cdot t) + 6C \exp(-\gamma \cdot t)$  |
| Верхня границя інтервалу   | $x = 5[C_1 \exp(\beta \cdot t) + C \exp(-\gamma \cdot t)] + \frac{21}{19}; \quad y = C_1 [\sqrt{26} \exp(\delta \cdot t) - 11 \exp(\beta \cdot t)] - 12C \exp(-\gamma \cdot t)$ |

Таблиця 11 – Коефіцієнти систем диференціальних рівнянь, призначених для моделювання процесів обміну типу А

| Межі інтервалу           | Коефіцієнти рівнянь (КР) | $\beta$                  | $\gamma$                  | $\delta$                  | $C$   | $C_1$  |
|--------------------------|--------------------------|--------------------------|---------------------------|---------------------------|-------|--------|
|                          |                          | Чисельні значення КР     | $(\sqrt{1054} - 79) / 20$ | $(\sqrt{1054} + 79) / 20$ | -     | -0,906 |
| Центр інтервалу          | Коефіцієнти рівнянь (КР) | $\beta$                  | $\gamma$                  | $\delta$                  | $C$   | $C_1$  |
|                          | Чисельні значення КР     | 2,5                      | 5                         | -                         | 13,32 | -67,52 |
| Верхня границя інтервалу | Коефіцієнти рівнянь (КР) | $\beta$                  | $\gamma$                  | $\delta$                  | $C$   | $C_1$  |
|                          | Чисельні значення КР     | $(3\sqrt{26} - 71) / 20$ | $(3\sqrt{26} + 71) / 20$  | $3\sqrt{26}/10$           | 8,723 | 13,855 |



Таблиця 12 – Системи диференціальних рівняння для моделювання процесів обміну типу Б

| Межі інтервалу           | Загальний випадок  | Частинний випадок  |
|--------------------------|--|--|
| Нижня границя інтервалу  | $\begin{cases} \dot{x} = \underline{c} - \underline{a}_{11}x - \underline{a}_{12}y - \underline{a}_{13}z; \\ \dot{y} = \underline{g} - \underline{a}_{21}x - \underline{a}_{22}y - \underline{a}_{23}z; \\ \dot{z} = \underline{h} + \underline{a}_{31}x + \underline{a}_{32}y - \underline{a}_{33}z; \end{cases}$ $x(0) = \underline{x}_0, y(0) = \underline{y}_0, z(0) = \underline{z}_0,$ | $\begin{cases} \dot{x} = 3,45 - 6,19x - 1,55y - 1,2z \\ \dot{y} = 1,85 - 0,51x - 4,9y - 0,73z \\ \dot{z} = 1,12 + 0,08x + 0,33y - 2,4z \end{cases}$ $x_0 = 35, y_0 = 20, z_0 = 12.,$ |
| Центр інтервалу          | $\begin{cases} \dot{x} = c - a_{11}x - a_{12}y - a_{13}z; \\ \dot{y} = g - a_{21}x - a_{22}y - a_{23}z; \\ \dot{z} = h - a_{31}x - a_{32}y - a_{33}z; \end{cases}$ $x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0$  | $\begin{cases} \dot{x} = 3,5 - 6x - 1,6y - 1,1z \\ \dot{y} = 1,9 - 0,5x - 4,7y - 0,7z \\ \dot{z} = 1,25 - 0,15x - 0,35y - 2,45z \end{cases}$ $x_0 = 38, y_0 = 21, z_0 = 14,$         |
| Верхня границя інтервалу | $\begin{cases} \dot{x} = \bar{c} - \bar{a}_{11}x - \bar{a}_{12}y - \bar{a}_{13}z; \\ \dot{y} = \bar{g} - \bar{a}_{21}x - \bar{a}_{22}y - \bar{a}_{23}z; \\ \dot{z} = \bar{h} + \bar{a}_{31}x + \bar{a}_{32}y - \bar{a}_{33}z; \end{cases}$ $x(0) = \bar{x}_0, y(0) = \bar{y}_0, z(0) = \bar{z}_0$  | $\begin{cases} \dot{x} = 3,55 - 5,81x - 1,65y - z \\ \dot{y} = 1,95 - 0,49x - 4,5y - 0,67z \\ \dot{z} = 1,28 + 0,22x + 0,37y - 2,5z \end{cases}$ $x_0 = 41, y_0 = 22, z_0 = 16.$     |

Розв’язок цих рівнянь виконано чисельним методом з використанням системи MATLAB (Розв’язувач ODE15S). Часовий інтервал змінної  $t \in [0, (0,1)]$ . Результати розв’язання цих рівнянь показано на рис. 3–6. В процесі їх розв’язку взято до уваги співвідношення (26), (31) та табл. 7, табл. 12.

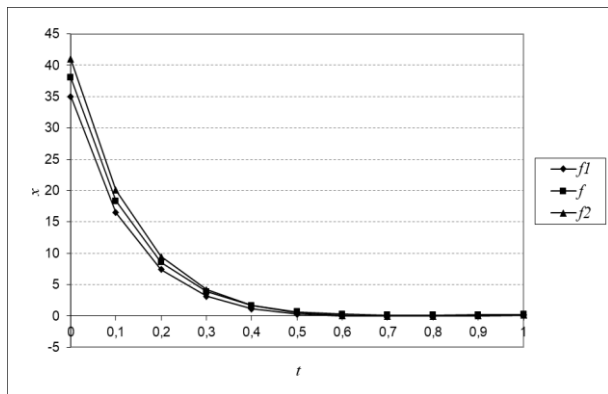


Рис. 3. Зміна у часі нижньої ( $f_1$ ), центральної ( $f$ ) та верхньої ( $f_2$ ), граничних функцій для змінної  $x = V_2$  (Fig. 3. Change in time of the lower ( $f_1$ ), central ( $f$ ) and upper ( $f_2$ ), boundary functions for the variable  $x = V_2$ )

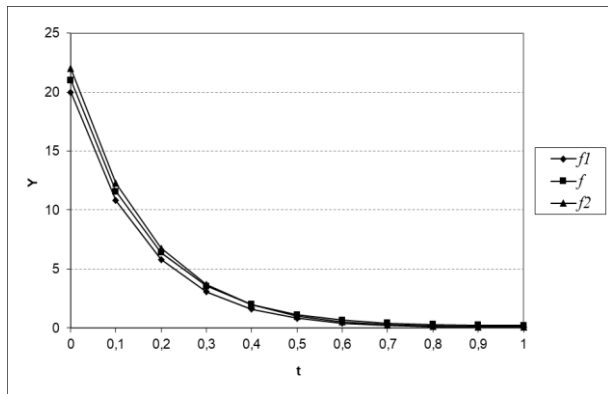


Рис. 4. Зміна у часі нижньої ( $f_1$ ), центральної ( $f$ ) та верхньої ( $f_2$ ), граничних функцій для змінної  $y = V_3$  (Fig. 4. Change in time of the lower ( $f_1$ ), central ( $f$ ) and upper ( $f_2$ ), boundary functions for the variable  $y = V_3$ )

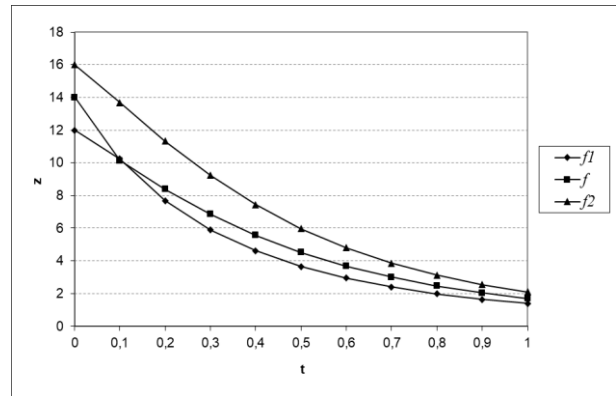


Рис. 5. Зміна у часі нижньої ( $f_1$ ), центральної ( $f$ ) та верхньої ( $f_2$ ), граничних функцій для змінної  $z = V_4$  (Fig. 5. Change in time of the lower ( $f_1$ ), central ( $f$ ) and upper ( $f_2$ ), boundary functions for the variable  $z = V_4$ )

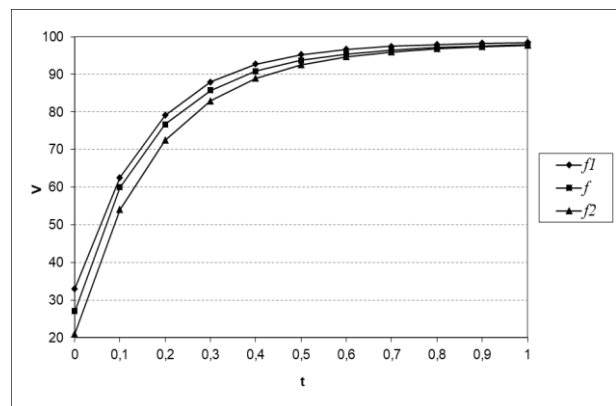


Рис. 6. Зміна у часі нижньої ( $f_1$ ), центральної ( $f$ ) та верхньої ( $f_2$ ), граничних функцій для змінної  $V_1$  (Fig. 6. Change in time of the lower ( $f_1$ ), central ( $f$ ) and upper ( $f_2$ ), boundary functions for the variable  $V_1$ )

Приймаючи до уваги зауваження щодо умови нормування (26) та заміну змінних, яка показана в табл. 7, можна визначити, що для даної моделі має місце співвідношення:

$$V_1(t) = 100 - x(t) - y(t) - z(t). \quad (41)$$

В [20–22] за наслідками ідентифікації моделей, зображених на рис. 1 та 2, встановлено, що інтенсивності переходів структурних змін  $\alpha_{ij}$  можна вважати змінними величинами. В цьому випадку, використовуючи співвідношення (3), (25), (30), (31), отримуємо систему:

$$\dot{x}_i = \sum_{k=1}^n a_{ik}(t)x_k + b_i(t), \quad \forall i = [1, n]. \quad (42)$$

В [23, с. 325] відмічено, що вибір методу розв'язання системи (42) залежить від властивостей функцій  $a_{ik}(t)$  і  $b_i(t)$ .

В цій роботі наведено таке визначення: «Повільно змінна функція».

Функцію  $f(t)$ , диференційовану в інтервалі  $(r, s)$ , де  $r, s$  – довільні дійсні числа, називають повільно змінною, якщо для неї виконано співвідношення:

$$\frac{df(t)}{dt} = \varepsilon \frac{df(\tau)}{d\tau}, \quad \tau = \varepsilon \cdot t, \quad \varepsilon \ll 1; \quad (43)$$

Змінну  $\tau$  у такому випадку називають «повільним часом». Диференціальні рівняння, коефіцієнти яких залежать від  $\tau$ , в [23] отримали назву диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами.

Далі розглянемо наближений метод розв'язання системи неоднорідних диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами, які визначено в інтервальному вигляді.

В [21, 22] для розв'язання рівнянь (27), (28) використано кусково-сталу апроксимацію їх коефіцієнтів, але без оцінки можливості її використання.

Для оцінки можливості її застосування на всьому часовому інтервалі моделювання процесів обміну виділимо послідовність вигляду:

$$S = \{T_1 = [t_0, t_1]\}, \{T_2 = [t_1, t_2]\}, \dots, \{T_v = [t_{v-1}, t_v]\}, \dots, \{T_w = [t_{w-1}, t_w]\}. \quad (44)$$

У (42) прийнято, що:

$$v = 1, 2, \dots, w, \quad t_{v-1} < t_v, \quad \forall v = [1, w]. \quad (45)$$

Тоді співвідношення (40) представимо у такому вигляді:

$$\dot{x}_i^{(w)} = \sum_{k=1}^n a_{ik}^{(v)} x_k + b_i^{(v)}; \quad x_i^{(v)}(t_0) = x_i^{(v-1)}; \quad \forall i = [1, n]; \quad \forall v = [1, w]. \quad (46)$$

У (44) прийнято, що величини інтервалів  $T_v$  не всі обов'язково рівні.

Із співвідношення (41) виходить, що для допустимості кусково-сталого апроксимації функції  $f(t)$  на інтервалі

$$\{T_v = [t_{v-1}, t_v]\}$$

повинно виконуватися таке співвідношення:

$$\frac{df(\tau)}{d\tau} = K \quad (47)$$

де  $K$  – стала величина.

Виконання співвідношення (47) можливе тільки за умови, що в співвідношенні (43) функція  $f(\tau)$  лінійна.

Для оцінки відхилення функції  $f(\tau)$  від лінійної використовуємо в модифікованому вигляді індекс Джині [26, 26], який, зазвичай використовують в економіці для оцінки нерівності розподілу прибутків [26]. Для цього на кожному інтервалі  $\{T_v = [t_{v-1}, t_v]\}$  виконаємо заміну змінних і прийmemo, що:

$$y = \frac{f(t_v) - f(t)}{f(t_v) - f(t_{v-1})}; \quad x = \frac{t_v - t}{t_v - t_{v-1}}. \quad (48)$$

При такій заміні змінних для кожного часового інтервалу  $\{T_v = [t_{v-1}, t_v]\}$  функція  $y = \phi(x)$  буде обмежена одиничним квадратом, який зображено на рис. 7.

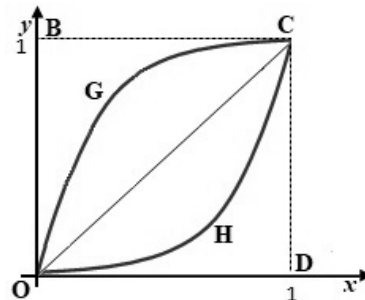


Рис. 7. Визначення модифікованого індексу Джині (Fig. 7. Definition of the modified Gini index)

Вигляд емпіричної залежності функції  $y = \phi(x)$  для кожного часового інтервалу  $\{T_v = [t_{v-1}, t_v]\}$  визначають за наслідками обробки експериментальних даних. Якщо функція  $y = \phi(x)$  лінійна, то площа трикутника ODC  $S_{ODC} = 1/2$ . Якщо функція  $y = \phi(x)$  нелінійна, то можливі два варіанти розташування її графіка відносно прямої  $y = x$ , це лінії OGC або OHC, які показано на рис. 7.

У загальному випадку визначимо модифікований індекс Джині у такому вигляді:

$$In = \left| \int_0^1 \phi(x) dx - \frac{1}{2} \right|. \quad (49)$$

$$\text{Якщо} \quad In \leq \delta, \quad (50)$$

то на інтервалі  $\{T_v = [t_{v-1}, t_v]\}$  можлива кусково-сталю апроксимацію коефіцієнтів диференціального рівняння. Для основних видів емпіричних залежностей, визначення параметрів яких допускає програмна система STATGRAPHICS XV.I, обчислення величини модифікованого індексу Джині показано в табл. 13.



Таблиця 13 – Модифікований індекс Джині для основних типів емпіричних залежностей

| №  | Емпірична залежність         | Індекс відхилення від середнього значення емпіричної залежності  |
|----|------------------------------|--|
| 1  | $y = a + bx$                 | $In =  (2a + b)/2 - 1/2 $  |
| 2  | $y = (a + bx)^2$             | $In =  (3a^2 + 3ab + b^2)/3 - 1/2 $  |
| 3  | $y = \exp(a + bx)$           | $In =  e^a (e^b/b - 1/b) - 1/2 $   |
| 4  | $y = 1/(a + bx)$             | $In =  [\ln(a + b) - \ln a]/b - 1/2 $  |
| 5  | $y = \sqrt{a + bx}$          | $In = \left  \frac{2}{3b} [(a + b)^{3/2} - 2a^{3/2}] - \frac{1}{2} \right $  |
| 6  | $y = a + b\sqrt{x}$          | $In =  a + 2b/3 - 1/2 $  |
| 7  | $y = (a + b\sqrt{x})^2$      | $In =  (6a^2 + 8ab + 3b^2)/b - 1/2 $   |
| 8  | $y = \exp(a + b\sqrt{x})$    | $In =  e^a (2e^b(b-1)/b^2 + 2/b^2) - 1/2 $   |
| 9  | $y = \sqrt{a + b\sqrt{x}}$   | $In = \left  \frac{1}{15b^2} \left[ \begin{array}{l} 8a^{5/2} - 1/2 - \\ 4\sqrt{a+b} \times \\ \times (2a^2 - ab - 3b^2) \end{array} \right] \right $      |
| 10 | $y = a + b \ln(x)$           | $In =  (a - b) - 1/2 $   |
| 11 | $y = (a + b \ln(x))^2$       | $In =  (a - b)^2 + b^2 - 1/2 $   |
| 12 | $y = ax^b$                   | $In =  a(1 - \varepsilon^{b+1})/(b+1) - 1/2 $  |
| 13 | $y = \sqrt{a + b \ln(x)}$    | <i>Величину In визначають чисельними методами</i>  |
| 14 | $y = a + b/x$                | $In =  a(1 - \varepsilon) - b \ln(\varepsilon) - 1/2 $   |
| 15 | $y = (a + bx^2)^2$           | $In = \left  \frac{1}{15} (15a^2 + 10ab + 3b^2) - 1/2 \right $   |
| 16 | $y = \exp(a + bx^2)$         | <i>Величину In визначають чисельними методами</i>  |
| 17 | $y = 1/(a + bx^2)$           | $In =  \text{Arth}(\sqrt{b/a})/\sqrt{ab} - 1/2 $   |
| 18 | $y = \sqrt{a + b\sqrt{x}}$   | $In = \left  \frac{1}{15b^2} \left[ \begin{array}{l} 8a^{5/2} - 4\sqrt{a+b} \times \\ \times (2a^2 - ab - 3b^2) \end{array} \right] - \frac{1}{2} \right $ |
| 19 | $y = \sqrt{a + bx^2}$        | $In = \left  \frac{(a \ln(a + b) + \sqrt{b})/(2\sqrt{b}) - 1/2 - a \ln(a)/(4\sqrt{b}) + \sqrt{a+b}/2}{-} \right $  |
| 20 | $y = \frac{1}{a + b/x}$      | $In = \left  \frac{b[\ln(b) - \ln(a + b)]}{a^2} + \frac{1}{a} - \frac{1}{2} \right $   |
| 21 | $y = \sqrt{a + \frac{b}{x}}$ | $In = \left  \frac{b \ln(\sqrt{a+b} + \sqrt{a})/\sqrt{a} - b \ln(b)/(2\sqrt{a}) - 1/2 + \sqrt{a+b}}{-} \right $  |

Запропонована в даному повідомленні методика може бути застосована для розв'язання систем лінійних однорідних і неоднорідних диференціальних рівнянь зі сталими та змінними коефіцієнтами, якщо вони задані повільно змінними функціями.

У тому випадку, коли коефіцієнти рівнянь визначені в інтервальному вигляді, методика дозволяє отримувати їх розв'язок також в інтервальному вигляді і не вимагає для цього спеціального програмного забезпечення.

### Висновки

1. Розглянуто системи лінійних однорідних та неоднорідних диференціальних рівнянь, які застосовують при моделюванні процесів обміну в багатокомпонентних середовищах, наприклад, в задачах хімічної кінетики, матеріалознавства, теорії марковських процесів.

2. Для отримання розв'язку цих рівнянь застосовано спеціалізовані калькулятори аналітичних перетворень та проведено їх тестування.

3. Для чисельного аналізу систем диференціальних рівнянь використовували систему Matlab (розв'язувач ODE15s).

4. Показано, що застосування інтервальних методів чисельного аналізу на початковому етапі моделювання систем має деякі переваги перед ймовірнісними тому, що не вимагають знання законів розподілу результатів вимірювань параметрів стану системи та їх похибок.

5. Показано, що існуючі методи розв'язання систем лінійних диференціальних рівнянь можна розподілити на дві групи. Загальним для цих груп служить використання інтервального розширення класичних методів для розв'язання диференціальних рівнянь, заданих в інтервальному вигляді. Відмінність між цими двома групами методів наступна.

Методи першої групи можуть бути використані для всіх типів диференціальних рівнянь, але вимагають створення спеціального програмного забезпечення.

Особливість методів другої групи в тому, що їх можна використовувати для розв'язання рівнянь в аналітичному вигляді або використовуючи пакети чисельного аналізу.

6. Застосування методів другої групи показано на прикладі розв'язання системи диференціальних рівнянь, коефіцієнти яких визначено в інтервальній формі. Система цих рівнянь призначена для моделювання процесів обміну із зовнішнім середовищем елементів моделі конкретної фізичної системи.

7. У тому випадку, коли коефіцієнти цих рівнянь є змінними величинами, застосовано їх кусково-стала апроксимація та наведено критерій, який визначає можливість її застосування.

8. Запропонована в даному повідомленні методика може бути застосована для розв'язання

систем лінійних однорідних і неоднорідних рівнянь визначено в інтервальному вигляді, диференціальних рівнянь зі сталими та змінними коефіцієнтами, якщо вони задані повільно змінними функціями. У тому випадку, коли коефіцієнти методика дозволяє отримувати їх розв'язок також в інтервальному вигляді і не вимагає для цього створення спеціального програмного забезпечення.

## REFERENCES

1. Dubovyk, V. P. and Yuryk, I. I. (2006), *Higher mathematics: Study guide*, A.S.K, Kyiv, 648 p., available at: <https://djvu.online/file/TruthdHinPW3q>
2. Reuter, L. G. (2006), *Theoretical sections of general chemistry: a textbook for students of higher educational institutions*, Karavela, Kyiv, 303 p., available at: <https://discovery.kpi.ua/Record/000179467/Description>
3. Korobov, V. I. (2004), *Systems of computer mathematics in chemistry: the main means of organizing calculations*, RVV DNU, Donetsk, 135 p. available at: <https://z-lib.io/book/16572323>
4. Dubnitskiy, V. Yu., Butenko, V. O. and Cherniavskiy, V. L. (2014), "Estimation of the sensitivity of a system of linear differential equations simulating the interaction of cement concrete with the external environment", *Information processing systems*, No. 8 (124), pp. 24–29. available at: <https://www.hups.mil.gov.ua/periodic-app/article/11927>
5. Prystavka, P. O. and Tivodar, O. V. (2017), "Model based on Markov's Lantz in the problem of making decisions about the purchase or sale of material assets", *Current problems of automation and information technologies*, Vol. 21, pp. 132–142, available at: <https://actualproblems.dp.ua/index.php/APAIT/article/view/116>
6. Dotsenko, N., Chumachenko, I., Galkin, A., Kuchuk, H. and Chumachenko, D. (2023), "Modeling the Transformation of Configuration Management Processes in a Multi-Project Environment", *Sustainability (Switzerland)*, Vol. 15(19), 14308, doi: <https://doi.org/10.3390/su151914308>
7. Lennart, L. (1999), *System Identification: Theory for User*, Prentice HAU PTR, Linkoping University, Sweden, 609 p. available at: <https://vdoc.pub/download/system-identification-theory-for-the-user-58301k4uo120>
8. Kovalenko, A. and Kuchuk, H. (2022), "Methods to Manage Data in Self-healing Systems", *Studies in Systems, Decision and Control*, Vol. 425, pp. 113–171, doi: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-96546-4\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-030-96546-4_3)
9. Gavrylenko, S. and Hornostal, O. (2021), "Development of a method for identification of the state of computer systems based on bagging classifiers", *Advanced Information Systems*, Vol. 5(4), pp. 5–9, doi: <https://doi.org/10.20998/2522-9052.2021.4.01>
10. Zhukovska, O. A. (2009), *Basics of interval analysis: textbook*, Osvita Ukrainy, Kyiv, 136 p., available at: <https://b.eruditor.link/file/625215/>
11. Gadetska, S., Dubnitskiy, V., Kushneruk, Yu. and Khodyrev, A. (2022), "Performance of basic arithmetic actions with complex numb", *Advanced Information Systems*, pp. 104–113, doi: <https://doi.org/10.20998/2522-9052.2022.1.17>
12. Kvyetnyy, R. N., Bohach, I. V., Boyko, O. R., Sofyna, O. Yu. and Shushura, O. M. (2013), *Modeling of systems and processes. Calculation methods*, VNTU, Vinnytsya, vol. 2, 233 p., available at: <https://docplayer.net/77951475-Kompyuterne-modelyuvannya-sistem-ta-procesiv-metodi-obchislen.html>
13. Levin V. I. (2015), "Interval derivative and interval-differential calculus", *Radio Electronics, Computer Science, Control*, No. 3, pp. 22-29, available at: <http://ric.zntu.edu.ua/article/view/52593/48631>
14. Burd, V. (2007), *Method of averaging for differential equations on an infinite interval: Theory and applications*, Chapman and Hall/CRC, New York, 360 p., doi: <https://doi.org/10.1201/9781584888758>
15. Nickel, K. L. E. (1986), "Using Interval Methods for the Numerical Solution of ODE's", *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 66, No. 11, pp. 513–523, doi: <https://doi.org/10.1002/zamm.19860661102>
16. Dubnitskiy, V., Kobylin, A., Kobylin, O., Kushneruk, Y. and Khodyrev, A. (2023), "Calculation of harrington function (desirability function) values under interval determination of its arguments", *Advanced Information Systems*, Vol. 7(1), pp. 71–81, doi: <https://doi.org/10.20998/2522-9052.2023.1.12>
17. Dobronets, B. S. (2007), *Interval mathematics*, Textbook, SFU, Krasnoyarsk, 287 p. available at: <https://bookskeeper.top/knigi/obrazovanie/137833-intervalnaya-matematika.html>
18. Moore, R. E. (1966), *Interval analysis*, Englewood Cliis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, N. J., 145 p., available at: <https://deepblue.lib.umich.edu/handle/2027.42/33298>
19. Alefeld, G. and Herzberger, J. (1983), *Introduction to Interval Computations*, Academic Press, New York, 1983, 352 p., available at: <https://archive.org/details/introductiontoin0000alef>
20. Mchedlov-Petrosyan, O. P., Dubnitskiy, V. Yu. and Chernyavsky, V. L. (1981), "Study of the late stages of cement hydration on a simulation model", *Reports of the USSR Academy of Sciences*, Vol. 256, No. 3, pp. 429–431, available at: [https://jglobal.jst.go.jp/en/detail?JGLOBAL\\_ID=200902083686310935](https://jglobal.jst.go.jp/en/detail?JGLOBAL_ID=200902083686310935)
21. Chernyavsky, V. L. (2008), "Adaptation of abiotic systems: concrete and reinforced concrete", Dnepropetrovsk National University of Railway Transport, Dnepropetrovsk, 412 p., available at: <https://search.rsl.ru/ru/record/01004408623>
22. Gomathi, B., Saravana Balaji, B., Krishna Kumar, V., Abouhawahwash, M., Aljahdali, S., Masud, M. and Kuchuk, N. (2022), "Multi-Objective Optimization of Energy Aware Virtual Machine Placement in Cloud Data Center", *Intelligent Automation and Soft Computing*, Vol. 33(3), pp. 1771–1785, doi: <http://dx.doi.org/10.32604/iasc.2022.024052>
23. Shkil, M. I., Leifura, V. M. and Samusenko, P. F. (2003), *Differential equations*, Technika, Kyiv, 321 p. available at: <https://www.twirpx.com/file/3262449/>
24. Vaytiev, V. A., Stepashina, E. V. and Mustafina, S. A. (2013), "Identification of a Mathematical Model of the Reduced Scheme of  $\alpha$ -methylstyrene Dimerization Reaction", *European Journal of Natural History*, No. 6, pp. 30–32. available at: <https://world-science.ru/en/article/view?id=33209>

25. Yuan, M., Li, P. and Wu, C. (2023), "Semi-parametric inference on Gini indices of two semi-continuous populations under density ratio models", *Econometrics Journal*, Vol. 26(2), pp. 174–188, doi: <http://dx.doi.org/10.1093/ectj/utac028>
26. Coutler, P. B. (2019), *Measuring Inequality*, A Methodological Handbook, Taylor & Francis Group, Routledge, New York, 216 p., doi: <https://doi.org/10.4324/9780429042874>

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Дубовик В. П., Юрик І. І. Вища математика. Київ: А.С.К. 2006, 648 с. URL: <https://djvu.online/file/TruthdHinPW3q>
2. Рейтер Л. Г. Теоретичні розділи загальної хімії. Київ : Каравела, 2006. 303 с. URL: <https://discovery.kpi.ua/Record/000179467/Description>
3. Коробов В. І. Системи комп'ютерної математики в хімії: основні засоби організації обчислень: Навчальний посібник. – Донецьк: РВВ ДНУ, 2004. 135 с. URL: <https://z-lib.io/book/16572323>
4. Дубницький В. Ю., Бутенко В. О., Чернявський В. Л. Оценка чувствительности системы линейных дифференциальных уравнений, моделирующей взаимодействие цементного бетона с внешней средой. *Системи обробки інформації*. 2014. Вип. 8 (124). С. 24–29. URL: <https://www.hups.mil.gov.ua/periodic-app/article/11927>
5. Приставка П. О., Тиводар О. В. Модель на основі ланцюгів Маркова в задачі прийняття рішень про купівлю або продаж матеріальних цінностей. *Актуальні проблеми автоматизації та інформаційних технологій*. 2017. Том 21. С. 132–142. URL: <https://actualproblems.dp.ua/index.php/APAIT/article/view/116>
6. Dotsenko N., Chumachenko I., Galkin A., Kuchuk H. and Chumachenko D. (2023). Modeling the Transformation of Configuration Management Processes in a Multi-Project Environment. *Sustainability (Switzerland)*. Vol. 15(19). 14308. DOI: <https://doi.org/10.3390/su151914308>
7. Lennart L. System Identification: Theory for User. Prentice HAU PTR, Linkoping University, Sweden. 609 p. URL: <https://vdoc.pub/download/system-identification-theory-for-the-user-58301k4uol20>
8. Kovalenko A., Kuchuk H. Methods to Manage Data in Self-healing Systems. *Studies in Systems, Decision and Control*. 2022. Vol. 425. P. 113–171. DOI: [https://doi.org/10.1007/978-3-030-96546-4\\_3](https://doi.org/10.1007/978-3-030-96546-4_3)
9. Gavrylenko S., Hornostal O. Development of a method for identification of the state of computer systems based on bagging classifiers. *Advanced Information Systems*. 2021. Vol. 5(4). P. 5–9. DOI: <https://doi.org/10.20998/2522-9052.2021.4.01>
10. Жуковська О. А. Основи інтервального аналізу: навчальний посіб., Київ: Освіта України, 2009. 136 с. URL: <https://b.eruditor.link/file/625215/>
11. Гадецька С. В., Дубницький В. Ю., Кушнерук Ю. І., Ходирев О. І. Обчислення значень функцій комплексної змінної з інтервальним аргументом, визначеним в гіперболічній формі. *Сучасні інформаційні системи*. 2022. Т. 6, № 3. С. 104–113. doi: <https://doi.org/10.20998/2522-9052.2022.1.17>
12. Кветний Р. Н., Богач І. В., Бойко О. Р., Софіна О. Ю., Шушура О. М. Моделювання інтервальних систем та процесів. *Методи обчислень. / Під заг. ред. Р. Н. Кветного*. Вінниця: ВНТУ, 2013. Т. 2. 233 с. URL: <https://docplayer.net/77951475-Komp-yuterne-modelyuvannya-sistem-ta-procesiv-metodi-obchislen.html>
13. Левин В. И. Интервальная производная и интервально-дифференциальное исчисление. *Радиоэлектроника, информатика, управління*, 2015. № 3, С. 22–29. URL: <http://ric.zntu.edu.ua/article/view/52593/48631>
14. Burd, V. Method of averaging for differential equations on an infinite interval: Theory and applications, New York: Chapman and Hall/CRC, 2007. 360 p. DOI: <https://doi.org/10.1201/9781584888758>
15. Nickel K. L. E. Using Interval Methods for the Numerical Solution of ODE's. *Zeitschrift fur Angewandte Mathematik und Mechanik*, Vol. 66, No. 11. P. 513-523. DOI: <https://doi.org/10.1002/zamm.19860661102>
16. Dubnitskiy V., Kobylin A., Kobylin O., Kushneruk Y., Khodyrev A. Calculation of harrington function (desirability function) values under interval determination of its arguments. *Advanced Information Systems*. 2023. Vol. 7(1). P. 71–81. DOI: <https://doi.org/10.20998/2522-9052.2023.1.12>
17. Добронец Б. С. Интервальная математика. Красноярск: СФУ, 2007. 287 с. URL: <https://bookskeeper.top/knigi/obrazovanie/137833-intervalnaya-matematika.html>
18. Moore R. E. Interval analysis, Englewood Cliis, N. J.: Prentice-Hall, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1966. 145 p. URL: <https://deepblue.lib.umich.edu/handle/2027.42/33298>
19. Alefeld G., Herzberger J. *Introduction to Interval Computations*, New York: Academic Press, 1983. 352 p. . URL: <https://archive.org/details/introductiontoin0000alef>
20. Мчедлов-Петросян О. П., Дубницький В. Ю., Чернявський В. Л. Исследование поздних стадий гидратации цементов на имитационной модели. *Доклады Академии Наук СССР*, 1981. Том 256, №3. С. 429–431. URL: [https://jglobal.jst.go.jp/en/detail?JGLOBAL\\_ID=200902083686310935](https://jglobal.jst.go.jp/en/detail?JGLOBAL_ID=200902083686310935)
21. Чернявський В. Л. Адаптація абіотических систем: бетон и железобетон. Днепропетровск: Днепропетровский национальный ун-т железнодорожного транспорта, 2008. 412 с. URL: <https://search.rsl.ru/ru/record/01004408623>
22. Gomathi V., Saravana Balaji V., Krishna Kumar, V., Abouhawwash M., Aljahdali S., Masud M., Kuchuk N. Multi-Objective Optimization of Energy Aware Virtual Machine Placement in Cloud Data Center. *Intelligent Automation and Soft Computing*. 2022. Vol. 33(3). P. 1771–1785. DOI: <http://dx.doi.org/10.32604/iasc.2022.024052>
23. Шкіль М. І., Лейфура В. М., Самусенко П. Ф. Диференціальні рівняння. Київ: Техніка, 2003. 321 с. URL: <https://www.twirpx.com/file/3262449/>
24. Vaytiev V. A., Stepashina E. V., Mustafina S. A. Identification of a Mathematical Model of the Reduced Scheme of  $\alpha$ -methylstyrene Dimerization Reaction. *European Journal of Natural History*. 2013. № 6. P. 30–32. URL: <https://world-science.ru/en/article/view?id=33209>

25. Yuan M., Li P., Wu, C. Semi-parametric inference on Gini indices of two semi-continuous populations under density ratio models. *Econometrics Journal*. 2023. Vol. 26(2). P. 174–188. DOI: <http://dx.doi.org/10.1093/ectj/utac028>
26. Coutler P. B. (2019), *Measuring Inequality: A Methodological Handbook*. New York: Taylor & Francis Group, Routledge, 2019. 216 p. DOI: <https://doi.org/10.4324/9780429042874>

Received (Надійшла) 02.11.2023

Accepted for publication (Прийнята до друку) 24.01.2024

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ / ABOUT THE AUTHORS

- Гадецька Світлана Вікторівна** – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, Харків, Україна;  
**Svitlana Gadetska** – PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of Department of Higher Mathematics of Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv, Ukraine;  
e-mail: [svgadetska@ukr.net](mailto:svgadetska@ukr.net); ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-9125-2363>;  
Scopus ID: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57203515764>.
- Дубницький Валерій Юрійович** – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, старший науковий співробітник Харківського навчально-наукового інституту “Каразінський банківський інститут” Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна, Харків, Україна;  
**Valeriy Dubnitskiy** – PhD in Engineering Senior Researcher Senior Researcher of “Karazin Banking Institute” of V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine;  
e-mail: [dubnitskiy@gmail.com](mailto:dubnitskiy@gmail.com); ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-1924-4104>;  
Scopus ID: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=58698004400>.
- Кушнерук Юрій Іонович** – кандидат технічних наук, доцент, старший викладач Інституту цивільної авіації Харківського національного університету Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків, Україна;  
**Yuri Kushneruk** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Senior Lecturer of Civil Aviation Institute of Ivan Kozhedub Kharkiv National Air Force University, Kharkiv, Ukraine;  
e-mail: [kyshneruk\\_ui@ukr.net](mailto:kyshneruk_ui@ukr.net); ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-5844-7137>;  
Scopus ID: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=36572023100>.
- Поночовний Юрій Леонідович** – доктор технічних наук, професор, професор кафедри інформаційних систем та технологій, Полтавський державний аграрний університет, Полтава, Україна;  
**Yuriy Ponochovnyi** - Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of the Department of Information Systems and Technologies, Poltava State Agrarian University, Poltava, Ukraine;  
e-mail: [yuriy.ponch@gmail.com](mailto:yuriy.ponch@gmail.com); ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-6856-2013>;  
Scopus ID: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=56446990700>.
- Ходирєв Олександр Іванович** – старший викладач Харківського навчально-наукового інституту “Каразінський банківський інститут” Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна, Харків, Україна;  
**Alexander Khodyrev** – Senior Lecturer of “Karazin Banking Institute” of V. N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine;  
e-mail: [khodyrevmjk3758@gmail.com](mailto:khodyrevmjk3758@gmail.com); ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-9871-9440>;  
Scopus ID: <https://www.scopus.com/authid/detail.uri?authorId=57192383812>.

**Simulation of exchange processes in multi-component environments with account of data uncertainty**

Svitlana Gadetska, Valeriy Dubnitskiy, Yuri Kushneruk, Yuriy Ponochovnyi, Alexander Khodyrev

**Abstract. The goal of the work.** Proposals for methods of solving systems of linear homogeneous and non-homogeneous differential equations with constant and variable coefficients that defined in interval form and intended for modeling exchange processes in multicomponent environments. **Research subject:** systems of linear homogeneous and non-homogeneous differential equations with constant and variable coefficients defined in interval form. **Research method:** interval analysis. **The obtained results.** Systems of linear homogeneous and non-homogeneous differential equations, which are used in modeling exchange processes in multicomponent environments, are considered. Such systems can be considered, for example, in problems of chemical kinetics, materials science, and the theory of Markov processes. To obtain the solution of these equations, specialized calculators of analytical transformations were used and tested. The Matlab system (ode15s solver) was used for numerical analysis of systems of differential equations. It is shown that the application of interval methods of numerical analysis at the initial stage of system modeling has some advantages over probabilistic methods because they do not require knowledge of the laws of distribution of the results of the system state parameter measurements and their errors. It is shown that existing methods of solving systems of linear differential equations can be divided into two groups. Common to these groups is the use of interval expansion of classical methods for solving differential equations given in interval form. The difference between these two groups of methods is as follows. The methods of the first group can be used for all types of differential equations but require the creation of special software. The peculiarity of the methods of the second group is that they can be used to solve equations analytically or using numerical analysis packages. The application of the methods of the second group is shown on the example of solving a system of differential equations, the coefficients of which are determined in interval form. The system of these equations is intended for modeling the processes of exchange with the external environment of the elements of the model of a specific physical system. In the case when the coefficients of these equations are variables, their piecewise-constant approximation is applied and a criterion that determines the possibility of its application is given. The technique proposed in the paper can be applied to solve systems of linear homogeneous and non-homogeneous differential equations with constant and variable coefficients if they are given by slowly varying functions. In the case when the coefficients of the equations are determined in the interval form, the technique allows obtaining their solution also in the interval form and does not require the creation of special software.

**Keywords:** systems of linear differential equations; variable coefficients of systems of linear differential equations; interval analysis; slowly varying functions; Gini index.