Methods of information systems synthesis

UDC 519.668: 519.66 **doi:** https://doi.org/10.20998/2522-9052.2023.4.03

С. В. Гадецька[1], В. Ю. Дубницький[2], Ю. І. Кушнерук[3], О. І. Ходирєв[2]

[1] Харківський національний автомобільно-дорожній університет, Харків, Україна
[2] ННІ “Каразінський банківський інститут” ХНУ імені В. Н. Каразіна, Харків, Україна
[3] Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків, Україна

ОБЧИСЛЕННЯ РЕЗУЛЬТАТІВ ОСНОВНИХ АРИФМЕТИЧНИХ ДІЙ З КВАТЕРНІОНАМИ, ВИЗНАЧЕНИМИ В ІНТЕРВАЛЬНІЙ ФОРМІ

Анотація. Мета дослідження. Створення EXCEL-орієнтованого калькулятора для визначення результатів основних арифметичних дій з кватерніонами, які задані гіперболічними інтервальними числами. **Предмет дослідження.** Множина кватерніонів і арифметичні дії, які визначені на цій множині. **Метод дослідження.** Алгоритмічний і чисельний аналіз процедур виконання основних арифметичних дій з кватерніонами, заданими гіперболічними інтервальними числами. **Результати дослідження.** Наведено визначення кватерніону, коефіцієнти при ортах якого є інтервальними числами. Отримано співвідношення для визначення в інтервальній формі таких характеристик, як: норма кватерніону, модуль кватерніону, модуль векторної частини кватерніону, аргумент кватерніону, знак кватерніону. Отримано співвідношення для визначення в інтервальній формі основних арифметичних дій: суми кватерніонів, різниці кватерніонів, множення сталої величини на кватерніон, скалярного добутку кватерніонів, добутку векторних частин кватерніонів, добутку кватерніонів, векторного добутку кватерніонів, лівостороннього та правостороннього ділення кватерніонів. Отримано співвідношення для обчислення визначників другого порядку, елементи яких визначено в інтервальній формі. Отримано співвідношення для наближеного обчислення визначників довільного порядку, елементи яких визначено в інтервальній формі. Показано, що операції множення (ділення) інтервальних чисел та піднесення їх до цілочисельного степеня доцільно виконувати, коли вони мають гіперболічну форму. Операцію додавання (віднімання) доцільно виконувати з інтервальними числами, поданими в класичній формі або в системі ЦЕНТР-РАДІУС. Останню форму бажано використовувати у випадку визначення коефіцієнтів ортів кватерніону за результатами технологічних розрахунків. Наведено скрін-копії формул для визначення векторного добутку кватерніонів за умови, що коефіцієнти при їх ортах представлено інтервальними числами.

Ключові слова: кватерніони; арифметичні дії з кватерніонами; інтервальні числа.

Вступ

Співвідношення

$$G = a_0 + \sum_{s=1}^{n} a_s \vec{i}_s \,, \qquad (1)$$

в якому a_0, $\forall a_s$, $s = 1, 2, ..., n$ – дійсні числа, $\vec{i}_s$ – спеціальні символи (уявні одиниці), називають гіперкомплексним числом. Властивості цих чисел розглянуто в $[1]$. Якщо

$$G = a_o \,, \ \sum_{s=1}^{n} a_s \vec{i}_s = 0 \,, \qquad (2)$$

то отримаємо дійсне число. Якщо

$$G = a_0 + a_1 i \,, \ \sum_{s=2}^{n} a_s \vec{i}_s = 0 \,, \ i^2 = -1 \,, \qquad (3)$$

то отримаємо комплексне число. Якщо

$$a_0 = 0 \,, \ \sum_{s=4}^{n} a_s \vec{i}_s = 0 \,,$$

$$\mathbf{G} = a_1 \vec{i}_1 + a_2 \vec{i}_2 + a_3 \vec{i}_3 = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k} \qquad (4)$$

і вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ взаємно ортогональні, то співвідношення (4) визначає вектор в евклідовому просторі. Правила дій з векторами докладно викладено в багатьох підручниках, наприклад в [2].

Далі розглянемо вектори $\mathbf{A} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$ і $\mathbf{B} = b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k}$. Таблицю Келі для скалярного добутку векторів $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ наведено в табл. 1.

Таблиця 1 – **Таблиця Келі для скалярного добутку векторів**

Множник	Множене		
	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

Ця таблиця визначає скалярний добуток векторів **A** і **B** у вигляді співвідношення:

$$\mathbf{AB} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \,. \qquad (5)$$

Для цих векторів таблицю Келі для векторного добутку векторів $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ наведено в табл. 2.

Таблиця 2 – **Таблиця Келі для векторного добутку векторів**

Множник	Множене		
	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	0	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	0	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	0

Ця таблиця визначає векторний добуток векторів A і B відповідно до співвідношення:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\vec{k}\,. \quad (6)$$

Якщо співвідношення (1) має вигляд:

$$\mathbf{G}=a_0+a_1\vec{i}_1+a_2\vec{i}_j+a_3\vec{i}_k\ ,\ a_i\neq 0\ ,\ i=1,2,3 \quad (7)$$

і для нього має місце табл. 3, то така таблиця визначає кватерніон.

Таблиця 3 – **Таблиця Келі для множення кватерніонів**

Множник	**Множене**			
	1	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
1	1	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	$\vec{i}$	-1	$\vec{k}$	- $\vec{j}$
$\vec{j}$	$\vec{j}$	- $\vec{k}$	-1	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{k}$	$\vec{j}$	$\vec{i}$	-1

Детально особливості виконання основних арифметичних операцій з кватерніонами розглянуто в [1, 3, 4, 5]. Для подальшого викладу матеріалу буде використано методику подання кватерніонів, яку описано в [4].

На думку авторів даного повідомлення, вона найбільш зручна для програмування операцій з кватерніонами в системі EXCEL.

Відповідно до [4] кватерніоном називають впорядковану четвірку дійсних чисел:

$$\mathbf{Q}=\left[q_0,q_1,q_2,q_3\right]. \quad (8)$$

В кватерніоні (8) розрізняють скалярну частину

scalq= q_0

і векторну частину

vectq=$\mathbf{q}=\left[q_1,q_2,q_3\right]$).

Кожен кватерніон може бути визначений характеристиками норми, модуля, модуля векторної частини і аргументу.

Норма кватерніона визначена співвідношенням вигляду:

$$\|\,\mathbf{Q}\,\|=q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2=\sum_{i=0}^{3}q_i^2\,. \quad (9)$$

Модуль кватерніона визначено співвідношенням:

$$|\,\mathbf{Q}\,|=\sqrt{q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2}=\sqrt{\sum_{i=0}^{3}q_i^2}\,. \quad (10)$$

Модуль векторної частини кватерніона визначено співвідношенням:

$$|\,\mathbf{q}\,|=\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{3}q_i^2}\,. \quad (11)$$

Аргумент кватерніона визначено співвідношенням:

$$\arg\mathbf{Q}=\arg\left[q_0+i|\mathbf{q}|\right]=\left[q_0+i\sqrt{q_1^2+q_2^2+q_3^2}\right]=$$

$$=\arg\left[q_0+i\sqrt{\sum_{i=1}^{3}q_i^2}\right],\ i^2=-1\,. \quad (12)$$

Співвідношення (9)…(12) представлені у такому вигляді для зручності виконання їх інтервального розширення [14]. Знаком кватерніона називають співвідношення:

$$\operatorname{Sign}\mathbf{Q}=\frac{\mathbf{Q}}{|\mathbf{Q}|}=$$

$$=\begin{bmatrix}\dfrac{q_0}{\sqrt{q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2}},\dfrac{q_1}{\sqrt{q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2}}\vec{i},\\ \dfrac{q_2}{\sqrt{q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2}}\vec{j},\dfrac{q_3}{\sqrt{q_0^2+q_1^2+q_2^2+q_3^2}}\vec{k}\end{bmatrix}. \quad (13)$$

Суму (різницю) кватерніонів **Q** і **P**

$$\mathbf{Q}\pm\mathbf{P}=\mathbf{C}$$

визначають відповідно до співвідношення:

$$\begin{bmatrix}q_0\pm p_0\\ q_1\pm p_1\\ q_2\pm p_2\\ q_3\pm p_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_0\\ c_1\\ c_2\\ c_3\end{bmatrix}. \quad (14)$$

Множення сталої величини на кватерніон (a**Q**=**Q**a=**C**) визначають відповідно до співвідношення:

$$\begin{bmatrix}aq_0\\ aq_1\\ aq_2\\ aq_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_0\\ c_1\\ c_2\\ c_3\end{bmatrix}. \quad (15)$$

При виконанні операції добутку кватерніонів необхідно звертати увагу на її некомутативність, тобто $\mathbf{P}\circ\mathbf{Q}\neq\mathbf{Q}\circ\mathbf{P}$.

Результат операції множення $\mathbf{P}\circ\mathbf{Q}$ отримують за співвідношенням:

$$\mathbf{P}\circ\mathbf{Q}=(\,p_0q_0-\mathbf{pq})+((\,p_0\,\mathbf{q}+q_0\,\mathbf{p})+(\mathbf{p}\times\mathbf{q})). \quad (16)$$

У співвідношенні (16) прийнято, що **pq=**vectp·vectq **–** скалярний добуток векторних частин кватерніонів, який виконується за співвідношенням (5), $\mathbf{p}\times\mathbf{q}$ = vect**p**$\times$vect**q** **–** векторний добуток векторних частин кватерніонів, який виконують згідно із співвідношенням (6). В результаті отримуємо кватерніон, скалярна частина якого дорівнює доданку в першій дужці співвідношення (16), векторна частина відповідає доданку в другій дужці цього ж співвідношення.

Кватерніоном, спряженим по відношенню до кватерніону (8), називають впорядковану четвірку дійсних чисел:

$$\overline{\mathbf{Q}}=\left[q_0,-q_1,-q_2,-q_3\right]. \quad (17)$$

При виконанні операції ділення необхідно брати до уваги некомутативність операції множення. Правила виконання операції ділення наведено в табл. 4.

Таблиця 4 – **Правила виконання операції ділення**

Тип операції	**Начальне рівняння**	**Розв'язок рівняння**
Лівостороннє ділення	$\mathbf{P} \circ \mathbf{X}=\mathbf{Q}$	$\mathbf{X}_{Л=}\lVert\mathbf{P}\rVert^{-1}\bar{\mathbf{P}} \circ \mathbf{Q}$
Правостороннє ділення	$\mathbf{X} \circ \mathbf{P}=\mathbf{Q}$	$\mathbf{X}_{П==}\lVert\mathbf{P}\rVert^{-1}\mathbf{P} \circ \bar{\mathbf{Q}}$

Векторний добуток кватерніонів, визначений для трьох співмножників, обчислюють згідно із співвідношенням, наведеним в [13, с. 47]:

$$\mathbf{P} \circ \mathbf{Q} \circ \mathbf{H} = D_0 - \vec{i}D_1 + \vec{j}D_2 - \vec{k}D_3 . \qquad (18)$$

Правило обчислення значень коефіцієнтів при ортах векторного добутку кватерніонів наведено в табл. 5.

Таблиця 5 – **Правило обчислення коефіцієнтів при ортах векторного добутку кватерніонів**

$D_0 = \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{vmatrix}$	$D_1 = \begin{vmatrix} p_0 & p_2 & p_3 \\ q_0 & q_2 & q_3 \\ h_0 & h_2 & h_3 \end{vmatrix}$
$D_2 = \begin{vmatrix} p_0 & p_1 & p_3 \\ q_0 & q_1 & q_3 \\ h_0 & h_1 & h_3 \end{vmatrix}$	$D_3 = \begin{vmatrix} p_0 & p_1 & p_2 \\ q_0 & q_1 & q_2 \\ h_0 & h_1 & h_2 \end{vmatrix}$

В $[4]$ доведено ізоморфізм між алгеброю кватерніонів (8) і алгеброю матриць, вид яких визначено співвідношенням:

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix} q_0 & -q_1 & -q_2 & -q_3 \\ q_1 & q_0 & -q_3 & q_2 \\ q_2 & q_3 & q_0 & -q_1 \\ q_3 & -q_2 & q_1 & q_0 \end{bmatrix}. \qquad (19)$$

Визначення цієї алгебри і її властивості викладено в [5]. Це істотно полегшує програмування обчислень тому, що матричні операції вбудовано в систему EXCEL.

Аналіз літератури. Застосування кватерніонів при проектуванні механізмів, зокрема, гнучких валів, розглянуто в [4]. В [6] розглянуто використання кватерніонів для вирішення задач машинної графіки. Застосування кватерніонів для опису кінематики тіл, що обертаються, описано в [7]. В [8, 9] наведено відомості про спеціалізовані програмні продукти на платформі MAPLE і призначені для виконання обчислювальних операцій з кватерніонами.

Платформа MAPLE вельми коштовна і вимагає від користувача спеціальної підготовки в області програмування. На думку авторів даного повідомлення, якщо немає необхідності обчислювати значення аналітичних функцій від кватерніонної змінної, то слушно використовувати для обчислень систему EXCEL. Використання MS Excel для побудови калькулятора обумовлено широким розповсюдженням цієї платформи, великим набором вбудованих функцій і доступним інструментарієм VBA для побудови як форм, так і макросів для їх обслуговування. Використання цих форм для введення вихідних даних і виведення результатів обчислення спрощує діалог користувача з програмою і зменшує вірогідність помилок.

В [10] показано, що в тих випадках, коли розрахунковим даним властива нестохастична невизначеність, доцільно використовувати для обчислень інтервальні числа. В даній роботі використовували інтервальні числа, які задані в гіперболічній формі.

У цьому варіанті інтервальне число x записують у вигляді:

$$x = \rho(ch\phi + \theta \cdot sh\phi) , \ \theta^2 = 1 . \qquad (20)$$

Тоді співвідношення (20) можна розглядати як окремий випадок гіперкомплексного числа – подвійне число, яке наведено в гіперболічній формі. Основні властивості цих чисел детально описано в [11]. Зв'язок між арифметикою кватерніонів і арифметикою нечітких чисел був розглянутий в [12].

Величину ρ називають гіпермодулем, величину φ – аргументом гіперболічного інтервального числа (гіперболічного числа). Величини ρ і φ визначають за співвідношеннями:

$$\rho = \sqrt{a_1 a_2} \ ; \ \phi = \frac{1}{2}\ln\frac{a_2}{a_1} . \qquad (21)$$

В **(**21) прийнято, що a_1, a_2 – межі інтервального числа А, визначеного в класичній формі. Дійсне інтервальне число [А] будемо визначати у вигляді пари дійсних чисел:

$$[\mathrm{A}]=(a_1, a_2) , \ 0 < a_1 \le a_2 . \qquad (22)$$

Із співвідношення (21) виходить, що гіпермодуль – це середня геометрична величина меж інтервалу. Правила виконання основних арифметичних дій з інтервальними числами, представленими в гіперболічній формі, показано в табл. 6.

Таблиця 6 – **Способи виконання основних арифметичних дій з інтервальними числами, які представлено в гіперболічній формі**

№	**Арифметична операція**	**Співвідношення, яке її реалізує**
1	$x+y$	$(\rho \cdot ch\phi + \delta \cdot ch\psi) + \theta(\rho \cdot sh\phi + \delta \cdot sh\psi)$
2	$x-y$	$(\rho \cdot ch\phi - \delta \cdot ch\psi) + \theta(\rho \cdot sh\phi - \delta \cdot sh\psi)$
3	$x \cdot y$	$\rho\delta(ch(\phi+\psi) + \theta \cdot sh(\phi+\psi))$
4	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{\rho}(ch(-\phi) + \theta \cdot sh(-\phi)).$
5	$\frac{x}{y}$	$\frac{\rho}{\delta}(ch(\phi-\psi) + \theta \cdot (sh(\phi-\psi))$
6	x^n	$\rho^n(ch(n\phi) + \theta \cdot sh(n\phi))$
7	$c \pm x$	$(c \pm \rho \cdot ch(\phi)) \pm \theta \cdot sh(\phi)$
8	cx	$c\rho(ch\phi + \theta \cdot sh\phi).$
9	$\frac{x}{c}$	$\frac{\rho}{c}(ch\phi + \theta \cdot sh\phi)$
10	$\frac{c}{x}$	$\frac{c}{\rho}(ch\phi - \theta \cdot sh\phi).$
11	$\sqrt{x}$	$\sqrt{\rho}\left(ch\frac{\phi}{2} + \theta \cdot sh\frac{\phi}{2}\right)$

Комбінація цих арифметичних дій надає можливість виконати всі арифметичні дії з кватерніонами, які вказано у співвідношеннях (9)-(18).

Мета дослідження. Створення EXCEL-орієнтованого калькулятора для обчислення результатів основних арифметичних дій з кватерніонами, заданими гіперболічними інтервальними числами.

Предмет дослідження. Множина кватерніонів і арифметичні дії, визначені на цій множині.

Метод дослідження. Алгоритмічний і чисельний аналіз процедур виконання основних арифметичних дій з кватерніонами, заданими гіперболічними інтервальними числами.

Отримані результати

Всі арифметичні операції з кватерніонами, відомості про які наведено в даному повідомленні, можна розподілити на унарні та бінарні операції. До унарних операцій відносять операції, які визначені співвідношеннями (9)...(13) і (15).

До бінарних відносять операції, які визначені співвідношеннями (14), (16), (18) і операцію ділення. Правила виконання операції ділення визначено в табл. 4.

У роботі [10] для обчислення значень функцій комплексної змінної з інтервальним аргументом застосували гіперболічні числа та числа, визначені в системі ЦЕНТР-РАДІУС.

Останні, відповідно до [10, 14], визначають у вигляді впорядкованої пари дійсних чисел:

$$\langle A\rangle=\langle a, r_a \rangle \tag{23}$$

де
$$a=\frac{a_1+a_2}{2}\,;\;\; r_a=\frac{a_2-a_1}{2}\,. \tag{24}$$

У подальшому будемо приймати, що $|r_a|<|a|$. Інші випадки в роботі не розглянуто, тому що вони не відповідали фізичному змісту задач, які розв'язували автори даного повідомлення. Операції додавання та віднімання в такому разі виконують згідно з правилами, наведеними в [14]:

$$\langle A\rangle+\langle B\rangle=\langle a+b, r_a+r_b\rangle\,; \tag{25}$$

$$\langle A\rangle-\langle B\rangle=\langle a-b, r_a+r_b\rangle. \tag{26}$$

Нами прийнята умова, що межі інтервалів, які визначають дані числа, утворені обчислювальними помилками, похибками вимірювань або неповним знанням області зміни деякої фізичної величини. Внаслідок цього повинні виконуватися нерівності:

$$a\ge r_a\ge 0\,,\; b\ge r_b\ge 0\,. \tag{27}$$

У протилежному випадку будемо вважати, що задача в межах наших уявлень про об'єкт дослідження фізичного змісту не має.

Із співвідношень, наведених в табл. 6 та (25), (26), випливає, що виконання операцій множення, ділення, піднесення до цілочисельного степеня і добування кореня раціонального степеня доцільно виконувати з інтервальними числами, визначеними в гіперболічній формі. Операції додавання і віднімання доцільно виконувати з інтервальними числами, визначеними в системі ЦЕНТР-РАДІУС. Зв'язки між різними формами подання інтервальних чисел показано в табл. 7 і 8.

Таблиця 7 – **Пряма форма подання інтервального числа**

Класична форма	**Система Центр-Радіус**	**Гіперболічна форма**
Стовпчик 1	**Стовпчик 2**	**Стовпчик 3**
$[A]=\Omega_1(a_1,a_2)$	$\langle A\rangle=\Omega_2(a,r_a)$,	$x=\Omega_3(\rho,\phi)$
(a_1,a_2) $a_1<a_2$	$a=\dfrac{a_1+a_2}{2}$, $r_a=\dfrac{a_2-a_1}{2}$	$\rho=\sqrt{a_1a_2}$, $\phi=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{a_2}{a_1}$ $\rho=\dfrac{r_a}{sh\phi}$, $\phi=Arcth\left(\dfrac{r_a}{a}\right)$

Таблиця 8 – **Обернена форма подання інтервального числа**

Класична форма	**Система Центр-Радіус**	**Гіперболічна форма**
Стовпчик 1	**Стовпчик 2**	**Стовпчик 3**
$[A]=\Omega_1(a_1,a_2)$	$\langle A\rangle=\Omega_2(a,r_a)$,	$x=\Omega_3(\rho,\phi)$
$a_1=a-r_a$, $a_2=a+r_a$	$\begin{cases}a=\rho\cdot ch\phi\\ r_a=\rho\cdot sh\phi\end{cases}$	$x=\rho(ch\phi+\theta\cdot sh\phi)$

Якщо початковими даними служать значення меж інтервального числа, то спосіб визначення його параметрів в системі ЦЕНТР-РАДІУС приведено в табл. 7, стовпчик 2.

Параметри інтервального числа, визначеного в гіперболічній формі, обчислюють використовуючи перший рядок в табл. 7, стовпчик 3.

Якщо початковими даними служать центр і радіус інтервального числа, то параметри інтервального числа, визначеного в гіперболічній формі, обчислюють використовуючи другий рядок в табл. 7, стовпчик 3.

Якщо інтервальне число визначене в гіперболічній формі, то для переходу до решти форм використовують табл. 8.

На рис. 1 показано таблицю з формулами, адаптованими до вигляду, представленому у таблицях 7 і 8 за рахунок заміни стандартних посилань на комірки іменами, які їм присвоєно за допомогою інструмента "Задати ім'я".

За допомогою стандартного інструменту "Перевірка даних", вікно налаштування якого показано на рис. 2, передбачено автоматичну перевірку умови, записаної у комірці B5 при введенні числових даних для обчислення.

Якщо значення a_2 (у комірці B4) виявиться меншим або рівним a_1 (у комірці B3), введення числа блокується, і на екран виводиться повідомлення, яке показане на рис. 3.

	A	B	C	D	E	F	G
1	Пряма форма подання інтервального числа						
2	**Класична форма**		**Система Центр-Радіус**		**Гіперболічна форма**		
3	$a_1=$		$a=$	=(a1+a2)/2	1)	ρ =	=КОРЕНЬ(a1*a2)
4	$a_2=$		$r_a=$	=(a2-a1)/2		φ =	=LN(a2/a1)/2
5		$a_1 < a_2$			2)	ρ =	=ra/SINH(φ)
6						φ =	=ATANH(ra/a)
7	Обернена форма подання інтервального числа						
8	**Класична форма**		**Система Центр-Радіус**		**Гіперболічна форма**		
9	$a_1=$	=a-ra	$a=$	=ρ*COSH(φ)	x=	=ρ*(COSH(φ)+Theta*SINH(φ))	
10	$a_2=$	=a+ra	$r_a=$	=ρ*SINH(φ)			

Рис. 1. Скрін-копія аркуша з таблицею з розрахунковими формулами
(Fig. 1. Screenshot a copy with table with calculation formulas**)**

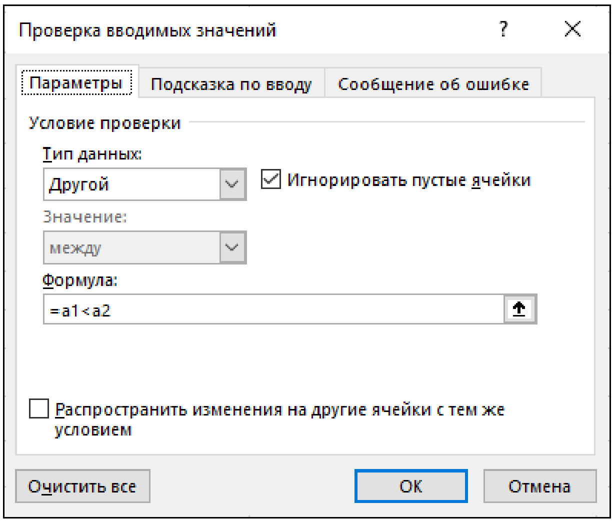


Рис. 2. Вікно налаштування перевірки початкових значень даних при їх введенні у комірки таблиці
(Fig. 2. Screenshot – a copy with window for checking the initial data values when they are entered into table cells**)**

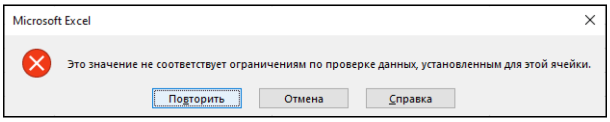


Рис. 3. Повідомлення про помилку при введенні початкових даних **(Fig. 3.** Screenshot a copy with error message when entering initial data**)**

Розглянемо виконання унарних операцій. Для цього приймемо наступне припущення. Якщо кількість інтервальних чисел більше одиниці, то будемо використовувати таку символіку:

$$[A]_i = (a_1(i), a_2(i)) = (a(i), r_a(i)) = \rho_i(ch(\phi_i)+\theta\cdot sh(\phi_i))\,;\ i=0,1,..,n. \qquad (28)$$

Інтервальне розширення (28), приймаючи до уваги (21), набуде вигляду:

$$[A]_i=\sqrt{a_1(i)a_2(i)}\cdot\begin{pmatrix} ch\left(\frac{1}{2}\ln\frac{a_2(i)}{a_1(i)}\right)+\\ +\theta\cdot sh\left(\frac{1}{2}\ln\frac{a_2(i)}{a_1(i)}\right)\end{pmatrix}. \qquad (29)$$

Використовуючи результати, наведені в [10, 15], співвідношення (21)...(24), (29) і співвідношення, яке наведено в табл. 6, №6 і табл. 7, отримаємо співвідношення для інтервального розширення норми кватерніону (9), представленої в системі ЦЕНТР-РАДІУС:

$$\langle\|\mathbf{Q}\|\rangle=\left\langle\begin{matrix}\sum_{i=0}^{3}a_1(i)a_2(i)\cdot ch\left(\ln\frac{a_2(i)}{a_1(i)}\right),\\ \sum_{i=0}^{3}a_1(i)a_2(i)\cdot sh\left(\ln\frac{a_2(i)}{a_1(i)}\right)\end{matrix}\right\rangle. \qquad (30)$$

Співвідношення (30) дозволяє визначити центр $a(ek)$ і радіус $r_a(ek)$ норми кватерніона, заданої в системі ЦЕНТР-РАДІУС:

$$a(ek)=\sum_{i=0}^{3}a_1(i)a_2(i)\cdot ch\left(\ln\frac{a_2(i)}{a_1(i)}\right);$$

$$r_a(ek)=\sum_{i=0}^{3}a_1(i)a_2(i)\cdot sh\left(\ln\frac{a_2(i)}{a_1(i)}\right). \qquad (31)$$

Для визначення інтервально визначеної норми кватерніону у формі гіперболічного числа, використовуючи табл. 8, розглянемо систему:

$$\begin{cases} a(ek)=\rho(ek)\cdot ch(\phi(ek))\\ r_a(ek)=\rho(ek)\cdot sh(\phi(ek))\end{cases}. \qquad (32)$$

Її корені:

$$\phi(ek)=Arcth\left(\frac{r_a(ek)}{a(ek)}\right),\ \rho(ek)=\frac{r_a(ek)}{sh(\phi(ek))} \qquad (33)$$

визначають аргумент і гіпермодуль норми кватерніона, визначеного в гіперболічній формі. Інтервальний модуль кватерніона (10), використовуючи (30)…(32) і табл. 6, №11, у гіперболічній формі буде таким:

$$\langle|\mathbf{Q}|\rangle=\sqrt{\frac{r_a(ek)}{sh(\phi(ek))}}\begin{pmatrix} ch\left(\frac{1}{2}Arcth\left(\frac{r_a(ek)}{a(ek)}\right)\right)+\\ +\theta\cdot sh\left(\frac{1}{2}Arcth\left(\frac{r_a(ek)}{a(ek)}\right)\right)\end{pmatrix}. \qquad (34)$$

Для обчислення інтервального розширення модуля векторної частини кватерніона (11) використаємо співвідношення (30)…(34). В системі ЦЕНТР-РАДІУС характеристики модуля векторної частини кватерніону такі:

$$a(ekv)=\sum_{i=0}^{3}a_1(i)a_2(i)\cdot ch\left(\ln\frac{a_2(i)}{a_1(i)}\right);$$

$$r_a(ekv)=\sum_{i=0}^{3}a_1(i)a_2(i)\cdot sh\left(\ln\frac{a_2(i)}{a_1(i)}\right). \qquad (35)$$

Для обчислення інтервально визначеної норми векторної частини кватерніона у формі гіперболічного числа, використовуючи табл. 8, складемо систему:

$$\begin{cases} a(ekv)=\rho(ekv)\cdot ch(\phi(ekv)) \\ r_a(ekv)=\rho(ekv)\cdot sh(\phi(ekv)) \end{cases}. \qquad (36)$$

Співвідношення

$$\phi(ekv)=Arcth\left(\frac{r_a(ekv)}{a(ekv)}\right);\ \rho(ekv)=\frac{r_a(ekv)}{sh(\phi(ekv))} \qquad (37)$$

визначають аргумент і гіпермодуль норми векторної частини кватерніону, визначеної в гіперболічній формі. Інтервальний модуль векторної частини кватерніону (11) в гіперболічній формі набере вигляду:

$$\left\langle|\mathbf{q}|\right\rangle=\sqrt{\frac{r_a(ekv)}{sh(\phi(ekv))}}\begin{pmatrix} ch\left(\frac{1}{2}Arcth\left(\frac{r_a(ekv)}{a(ekv)}\right)\right)+ \\ +\theta\cdot sh\left(\frac{1}{2}Arcth\left(\frac{r_a(ekv)}{a(ekv)}\right)\right)\end{pmatrix}. \qquad (38)$$

Аргумент кватерніона (12) в інтервальній формі визначимо таким співвідношенням:

$$\arg <\mathbf{Q}>=\arg[<\mathbf{q_0}>+\mathbf{i}<\mathbf{q}>],\ i^2=-1. \qquad (39)$$

Обчислення аргументу комплексного числа (39), заданого в інтервальному вигляді, детально розглянуто авторами даного повідомлення в [15].

Для отримання інтервального розширення знаку кватерніону (13) розглянемо інтервальне розширення коефіцієнтів кватерніону k_i, $i=0,...,3$. Використовуючи (13) і (34) отримаємо ($i=0,...,3$):

$$\left\langle k(i)\right\rangle=\frac{\sqrt{q_1(i)q_2(i)}\cdot\begin{pmatrix} ch\left(\frac{1}{2}\ln\frac{q_2(i)}{q_1(i)}\right)+ \\ +\theta\cdot sh\left(\frac{1}{2}\ln\frac{q_2(i)}{q_1(i)}\right)\end{pmatrix}}{\sqrt{\frac{r_a(ek)}{sh(\phi(ek))}}\begin{pmatrix} ch\left(\frac{1}{2}Arcth\left(\frac{r_a(ek)}{a(ek)}\right)\right)+ \\ +\theta\cdot sh\left(\frac{1}{2}Arcth\left(\frac{r_a(ek)}{a(ek)}\right)\right)\end{pmatrix}}, \qquad (40)$$

Використовуючи табл. 6, №5, гіпермодуль гіперболічного інтервального числа отримаємо у вигляді:

$$\rho(i)=\sqrt{\frac{q_1(i)q_2(i)\cdot sh(\phi\ (ek))}{r_a(ek)}},\ i=0,...,3. \qquad (41)$$

Аргумент гіперболічного інтервального числа отримаємо у вигляді:

$$\varphi(i)=\frac{1}{2}\left[\ln\frac{q_2(i)}{q_1(i)}-Arcth\left(\frac{r_a(ek)}{a(ek)}\right)\right]. \qquad (42)$$

Таким чином інтервальне розширення (13) набуде вигляду:

$$<\mathrm{Sgn}\ \mathbf{Q}>=\begin{bmatrix} \rho(0)(ch(\varphi(0)))+\theta\cdot sh(\varphi(0)), \\ \rho(1)(ch(\varphi(1))+\theta\cdot sh(\varphi(1))\cdot\vec{i}\,), \\ \rho(2)(ch(\varphi(2))+\theta\cdot sh(\varphi(2))\cdot\vec{j}\,), \\ \rho(3)(ch(\varphi(3))+\theta\cdot sh(\varphi(3))\cdot\vec{k}\,)\end{bmatrix}. \qquad (43)$$

Розглянемо виконання бінарних операцій. Операцію додавання кватерніонів < **Q** > і <**P**> за умовою, що коефіцієнти при їх ортах задані інтервальними числами, визначеними в системі ЦЕНТР-РАДІУС, передбачено виконувати таким чином. Використовуючи (14) і (24), отримаємо:

$$\begin{aligned} <\mathbf{Q}>+<\mathbf{P}>=\ &\left\langle(q_0+p_0),(r_{q0}+r_{p0})\right\rangle+ \\ &+\left\langle(q_1+p_1),(r_{q1}+r_{p1})\right\rangle\cdot\vec{i}+ \\ &+\left\langle(q_2+p_2),(r_{q2}+r_{p2})\right\rangle\cdot\vec{j}+ \\ &+\left\langle(q_3+p_3),(r_{q3}+r_{p3})\right\rangle\cdot\vec{k}. \end{aligned} \qquad (44)$$

Різницю кватерніонів < **Q** > і <**P**> за такими ж умовами визначимо за співвідношенням:

$$\begin{aligned} \left\langle\mathbf{Q}\right\rangle-\left\langle\mathbf{P}\right\rangle=&\left\langle\begin{matrix}(q_0-p_0),\\(r_{q0}+r_{p0})\end{matrix}\right\rangle+\left\langle\begin{matrix}(q_1-p_1),\\(r_{q1}+r_{p1})\end{matrix}\right\rangle\cdot\vec{i}+ \\ &+\left\langle\begin{matrix}(q_2-p_2),\\(r_{q2}+r_{p2})\end{matrix}\right\rangle\cdot\vec{j}+\left\langle\begin{matrix}(q_3-p_3),\\(r_{q3}+r_{p3})\end{matrix}\right\rangle\cdot\vec{k}. \end{aligned} \qquad (45)$$

Множення сталої величини на кватерніон (α**Q** =**Q**α =**C**), якщо його коефіцієнти визначено в інтервальній формі, визначають відповідно до співвідношення (15) та табл. 6, №8:

$$\begin{aligned} \alpha <\mathbf{Q}>=\ &\alpha\rho(q_0)(ch(\phi_{q0})+\theta\cdot sh(\phi_{q0}))+ \\ &+\alpha\cdot\rho(q_1)(ch(\phi_{q1})+\theta\cdot sh(\phi_{q1}))\cdot\vec{i}+ \\ &+\alpha\cdot\rho(q_2)(ch(\phi_{q2})+\theta\cdot sh(\phi_2))\cdot\vec{j}+ \\ &+\alpha\cdot\rho(q_3)(ch(\phi_{q3})+\theta\cdot sh(\phi_{q3}))\cdot\vec{k}. \end{aligned} \qquad (46)$$

Для виконання операції добутку кватерніонів, визначеної у співвідношенні (16), необхідно обчислити значення скалярного добутку векторних частин кватерніонів-співмножників, добуток векторної частини кватерніону на сталу величину - відповідно до співвідношення (46), векторний добуток векторних частин кватерніонів-співмножників. Для останньої операції необхідно обчислити величини визначників другого порядку.

Скалярним добутком кватерніонів [13, с. 41] називають співвідношення:

$$\mathbf{P}\cdot\mathbf{Q}=p_0q_0+p_1q_1+p_2q_2+p_3q_3. \qquad (47)$$

Всі ці операції необхідно виконати за умови, що їх елементи представлено в інтервальному вигляді.

Як відомо, наприклад, з роботи [16], визначником квадратної матриці **A**=$\left(a_{ij}\right)$ порядку n називають величину, яку обчислюють за співвідношенням:

$$D=\det(a_{ij})=\sum_{\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n\end{pmatrix}} sign\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n\end{pmatrix}\cdot a_{i_1 1}a_{i_2 2}\ldots a_{i_n n}\,. \quad (48)$$

У співвідношенні (48) прийнято, що суму визначають по всіх підстановках $\begin{pmatrix}1 & 2 & \ldots & n\\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n\end{pmatrix}$ із S_n. У свою чергу S_n – це множина всіх підстановок на множині $\{1,2,\ldots,n\}$ перших n натуральних чисел.

Порівнюючи співвідношення (47) і (48) із визначенням позиномів, прийнятим в геометричному програмуванні [17], і визначенням виробничої функції з постійним коефіцієнтом еластичності заміщення [18], необхідно відзначити наступне. Загальним завданням при виконанні інтервального розширення цих функцій буде завдання отримання інтервального розширення функції:

$$G=\prod_{i=1}^{n} g_i^{\pi_i}\,. \quad (49)$$

Для $\pi_i>0$ її розв'язок розглянуто в [19]. У даній роботі приймемо, що $\pi_i=1$, $\forall i=1,2,\ldots,n$. Використовуючи (20), кожний із співмножників у (49) в гіперболічній формі виглядатиме так:

$$\langle g_i\rangle=\rho\left(g_i\right)\left(ch(\phi(g_i))+\theta\cdot sh(\phi(g_i))\right). \quad (50)$$

Співвідношення (49), використовуючи табл. 6 № 3, набуде вигляду:

$$\langle G\rangle=\prod_{i=1}^{n}\rho\left(g_i\right)\left(ch(\sum_{i=1}^{n}\phi(g_i))+\theta\cdot sh(\sum_{i=1}^{n}\phi(g_i))\right). \quad (51)$$

У системі ЦЕНТР-РАДІУС центр співвідношення (51), величина a_G і його радіус та величина r_{aG} приймуть вигляд:

$$a_G=\prod_{i=1}^{n}\rho\left(g_i\right)\cdot ch(\sum_{i=1}^{n}\phi(g_i)),$$

$$r_{aG}=\prod_{i=1}^{n}\rho\left(g_i\right)\cdot sh(\sum_{i=1}^{n}\phi(g_i)). \quad (52)$$

Для отримання інтервального розширення виконання операції множення кватерніонів (16) приймемо, що $V=(p_0,p_1,p_2,p_3)$.

Тоді кватерніон

$$\mathbf{P}=p_0+p_1\vec{i}+p_2\vec{j}+p_3\vec{k}\,; \quad (53)$$

кватерніон

$$\mathbf{Q}=q_0+q_1\vec{i}+q_2\vec{j}+q_3\vec{k}\,. \quad (54)$$

В інтервальному вигляді в системі ЦЕНТР-РАДІУС кватерніони **P** і **Q** приймуть такий вигляд:

$$\langle\mathbf{P}\rangle=\langle a(p_0),r(p_0)\rangle+\langle a(p_1),r(p_1)\rangle\vec{i}+$$
$$+\langle a(p_2),r(p_2)\rangle\vec{j}+\langle a(p_3),r(p_3)\rangle\vec{k}\,; \quad (55)$$

$$\langle\mathbf{Q}\rangle=\langle a(q_0),r(q_0)\rangle+\langle a(q_1),r(q_1)\rangle\vec{i}+$$
$$+\langle a(q_2),r(q_2)\rangle\vec{j}+\langle a(q_3),r(q_3)\rangle\vec{k}\,. \quad (56)$$

Їх добуток в гіперболічному вигляді та в системі ЦЕНТР-РАДІУС буде таким:

$$\langle\mathbf{P}\rangle\langle\mathbf{Q}\rangle=\left\langle\begin{matrix}\rho(p_i)\rho(q_i)ch(\phi_i+\psi_i),\\ \rho(p_i)\rho(q_i)sh(\phi_i+\psi_i)\end{matrix}\right\rangle,\ i=0,1,2,3. \quad (57)$$

Для отримання (57) було використано співвідношення (23) та табл. 6, №3.

Перший доданок в (16), в системі ЦЕНТР-РАДІУС, прийме вигляд:

$$\langle\mathbf{B}\rangle=\langle p_0q_0\rangle-\langle\mathbf{pq}\rangle. \quad (58)$$

Центр цього співвідношення, приймаючи до уваги (25) і (26), визначимо так:

$$\text{B}=\rho(p_0)\rho(q_0)ch(\phi_0+\psi_0)-$$
$$-\sum_{i=1}^{3}\rho(p_i)\rho(q_i)ch(\phi_i+\psi_i)\,. \quad (59)$$

Радіус співвідношення (59) набуде вигляду:

$$r_B=\rho(p_0)\rho(q_0)sh(\phi_0+\psi_0)+$$
$$+\sum_{i=1}^{3}\rho(p_i)\rho(q_i)sh(\phi_i+\psi_i)\,. \quad (60)$$

Другий доданок в (16), в системі ЦЕНТР-РАДІУС, прийме вигляд:

$$p_0\,\mathbf{q}+q_0\,\mathbf{p}=\left(p_0q_1+q_0p_1\right)\cdot\vec{i}+$$
$$+\left(p_0q_2+q_0p_2\right)\cdot\vec{j}+\left(p_0q_3+q_0p_3\right)\cdot\vec{k}\,. \quad (61)$$

Отримаємо в системі ЦЕНТР-РАДІУС співвідношення:

$$\langle\mathbf{C}\rangle=\langle p_0q_1\rangle=\begin{pmatrix}\rho(p_0)\rho(q_1)\left(ch(\phi(p_0)+\phi(q_1)\right)+\\ +\theta\cdot sh\left(\phi(p_0)+\phi(q_1)\right)\end{pmatrix}=$$
$$=\left\langle\begin{matrix}\rho(p_0)\rho(q_1)(ch(\phi(p_0)+\phi(q_1)),\\ \rho(p_0)\rho(q_1)\cdot sh(\phi(p_0)+\phi(q_1))\end{matrix}\right\rangle. \quad (62)$$

Використовуючи табл. 8, стовпчик 2, співвідношення (62) представимо у вигляді:

$$\langle\mathbf{C}\rangle=\langle p_0q_1\rangle=\langle a_C,r_C\rangle, \quad (63)$$

де:

$$a_C=\rho(p_0)\rho(q_1)(ch(\phi(p_0)+\phi(q_1))\,; \quad (64)$$

$$r_C=\rho(p_0)\rho(q_1)(sh(\phi(p_0)+\phi(q_1))\,. \quad (65)$$

Для співвідношень типу (62) подібне подання результатів обчислень прийняте надалі за замовченням. Для зручності організації обчислювального процесу введемо проміжні змінні у вигляді попарних добутків, визначених в системі ЦЕНТР-РАДІУС:

$$<\mathbf{D}>=<p_1q_0> = <\rho(p_1)\rho(q_0)(ch(\phi(p_1)+\phi(q_0)),$$
$$\rho(p_1)\rho(q_0)\cdot sh(\phi(p_1)+\phi(q_0))>; \qquad (66)$$

$$<\mathbf{E}>=<p_0q_2> = <\rho(p_0)\rho(q_2)(ch(\phi(p_0)+\phi(q_2)),$$
$$\rho(p_0)\rho(q_2)\cdot sh(\phi(p_0)+\phi(q_2))>; \qquad (67)$$

$$<\mathbf{F}>=<p_2q_0> = <\rho(p_2)\rho(q_0)(ch(\phi(p_2)+\phi(q_0)),$$
$$\rho(p_2)\rho(q_0)\cdot sh(\phi(p_2)+\phi(q_0))>; \qquad (68)$$

$$<\mathbf{K}>=<p_0q_3>=<\rho(p_0)\rho(q_3)(ch(\phi(p_0)+\phi(q_3)),$$
$$\rho(p_0)\rho(q_3)\cdot sh(\phi(p_0)+\phi(q_3))>; \qquad (69)$$

$$<\mathbf{H}>=<p_3q_0>=<\rho(p_3)\rho(q_0)(ch(\phi(p_3)+\phi(q_0)),$$
$$\rho(p_3)\rho(q_0)\cdot sh(\phi(p_3)+\phi(q_0))>. \qquad (70)$$

Для зручності програмної реалізації цих обчислень зведемо їх у табл. 9.

Таблиця 9 – **Інтервальні значення попарних доданків, що виникають при множенні кватерніонів**

Умовне визначення доданків	**Обчислення центру доданків**	**Обчислення радіусу доданків**
<C>	$a_c = \rho(p_0)\rho(q_1)(ch(\phi(p_0)+\phi(q_1))$,	$r_c = \rho(p_0)\rho(q_1)\cdot sh(\phi(p_0)+\phi(q_1))$
<D>	$a_D = \rho(p_1)\rho(q_0)(ch(\phi(p_1)+\phi(q_0))$	$r_D = \rho(p_1)\rho(q_0)\cdot sh(\phi(p_1)+\phi(q_0))$
<E>	$a_E = \rho(p_0)\rho(q_2)(ch(\phi(p_0)+\phi(q_2))$	$r_E = \rho(p_0)\rho(q_2)(sh(\phi(p_0)+\phi(q_2))$
<F>	$a_F = \rho(p_2)\rho(q_0)(ch(\phi(p_2)+\phi(q_0))$	$r_F = \rho(p_2)\rho(q_0)(sh(\phi(p_2)+\phi(q_0))$
<K>	$a_K = \rho(p_0)\rho(q_3)(ch(\phi(p_0)+\phi(q_3))$	$r_K = \rho(p_0)\rho(q_3)(sh(\phi(p_0)+\phi(q_3))$
<H>	$a_H = \rho(p_3)\rho(q_0)(ch(\phi(p_3)+\phi(q_0))$	$r_H = \rho(p_3)\rho(q_0)(sh(\phi(p_3)+\phi(q_0))$

Другий доданок в (16) в інтервальній формі в системі ЦЕНТР-РАДІУС буде таким:

$$<p_0\,\mathbf{q}+q_0\,\mathbf{p}>=\left[\left(a_C+a_D\right),\left(r_C+r_D\right)\right]\cdot\vec{i}\,+$$
$$+\left[\left(a_E+a_F\right),\left(r_E+r_F\right)\right]\cdot\vec{j}\,+$$
$$+\left[\left(a_K+a_H\right),\left(r_K+r_H\right)\right]\cdot\vec{k}\,. \qquad (71)$$

Векторний добуток векторної частини кватерніонів **P і Q**, або третій доданок в (16), представимо у вигляді:

$$<\mathbf{p}>\times<\mathbf{q}>=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \langle p_1\rangle & \langle p_2\rangle & \langle p_3\rangle\\ \langle q_1\rangle & \langle q_2\rangle & \langle q_3\rangle\end{vmatrix}=$$
$$=\langle\det(1)\rangle\cdot\vec{i}-\langle\det(2)\rangle\cdot\vec{j}+\langle\det 3)\rangle\cdot\vec{k}\,\cdot \qquad (72)$$

Визначники з (16) приймуть вигляд:

$$\langle\det(1)\rangle=\begin{vmatrix}\langle p_2\rangle & \langle p_3\rangle\\ \langle q_2\rangle & \langle q_3\rangle\end{vmatrix},$$

$$\langle\det(2)\rangle=\begin{vmatrix}\langle p_1\rangle & \langle p_3\rangle\\ \langle q_1\rangle & \langle q_3\rangle\end{vmatrix},$$

$$\langle\det(3)\rangle=\begin{vmatrix}\langle p_1\rangle & \langle p_2\rangle\\ \langle q_1\rangle & \langle q_2\rangle\end{vmatrix}. \qquad (73)$$

Інтервальні розширення діагональних добутків визначника $\langle\det(1)\rangle$ приведено у співвідношеннях (74) і (75):

$$a(p_2,q_3)=\rho(p_2)\rho(q_3)\ ch(\phi(p_2)+\phi(q_3));$$
$$r(p_2,q_3)=\rho(p_2)\rho(q_3)\ sh(\phi(p_2)+\phi(q_3)); \qquad (74)$$
$$a(p_3,q_2)=\rho(p_3)\rho(q_2)\ ch(\phi(p_3)+\phi(q_2));$$
$$r(p_3,q_2)=\rho(p_3)\rho(q_2)\ sh(\phi(p_3)+\phi(q_2)). \qquad (75)$$

Інтервальні розширення діагональних добутків визначника $\langle\det(2)\rangle$ приведено у співвідношеннях (76) і (77):

$$a(p_1,q_3)=\rho(p_1)\rho(q_3)\ ch(\phi(p_1)+\phi(q_3));$$
$$r(p_1,q_3)=\rho(p_1)\rho(q_3)\ sh(\phi(p_1)+\phi(q_3)); \qquad (76)$$
$$a(p_3,q_1)=\rho(p_3)\rho(q_1)\ ch(\phi(p_3)+\phi(q_1));$$
$$r(p_3,q_1)=\rho(p_3)\rho(q_1)\ sh(\phi(p_3)+\phi(q_1)). \qquad (77)$$

Інтервальні розширення діагональних добутків визначника $\langle\det(3)\rangle$ приведено у співвідношеннях (78) і (79):

$$a(p_1,q_2)=\rho(p_1)\rho(q_2)\ ch(\phi(p_1)+\phi(q_2));$$
$$r(p_1,q_2)=\rho(p_1)\rho(q_2)\ sh(\phi(p_1)+\phi(q_2)); \qquad (78)$$
$$a(p_2,q_1)=\rho(p_2)\rho(q_1)\ ch(\phi(p_2)+\phi(q_1));$$
$$r(p_2,q_1)=\rho(p_2)\rho(q_1)\ sh(\phi(p_2)+\phi(q_1)). \qquad (79)$$

Центри і радіуси доданків співвідношення (72) показані в табл. 10.

Послідовно виконуючи дії, вказані у співвідношеннях (60)…(79) отримаємо величину добутку кватерніонів, поданого в інтервальному вигляді.

Таблиця 10 – **Центри та радіуси векторного добутку векторної частини кватерніонів**

Визначник	Центр визначника	Радіус визначника
<det1>	$a(\det(1)) = a(p_2,q_3) - a(p_3,q_2))$	$r(\det(1)) = (r(p_2,q_3) + r(p_3,q_2))$
<det2>	$a(\det(2)) = a(p_1,q_3) - a(p_3,q_1))$	$r(\det(2)) = r(p_1,q_3) + r(p_3,q_1))$
<det2>	$a(\det(3)) = a(p_1,q_2) - a(p_2,q_1))$	$r(\det(3)) = r(p_1,q_2) + r(p_2,q_1))$

Правила виконання операції ділення приведені в табл. 4. Операція ділення полягає в послідовному виконанні визначення величини, зворотній нормі кватерніона і множенні її на добуток кватерніонів, один з яких спряжений. Загальний вигляд спряженого кватерніона наведено в (17).

Визначення в інтервальному вигляді норми кватерніона наведено в (30) … (33). Зважаючи на табл. 6 №4 і (33), отримаємо:

$$\|\mathbf{P}\|^{-1} = \frac{sh(\phi(ek))}{r_a(ek)} \begin{pmatrix} ch(-Arcth\left(\frac{r_a(ek)}{a(ek)}\right) + \\ +\theta \cdot sh(-Arcth\left(\frac{r_a(ek)}{a(ek)}\right) \end{pmatrix}. \quad (80)$$

Найбільш трудомісткою при обчисленні векторного добутку кватерніонів (18) буде процедура обчислення визначника третього порядку з інтервально визначеними елементами. Співвідношення (18) запишемо у вигляді:

$$D = \det(a_{ij}) = \sum_{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}} sign\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \cdot \prod_{u=1}^{n} a_{i_u u}. \quad (81)$$

У співвідношенні (81) прийнято, що:

$$a_{i_1 1} a_{i_2 2} \dots a_{i_n n} = \prod_{u=1}^{n} a_{i_u u}. \quad (82)$$

Ліву межу чисельного значення визначника (81), визначену в системі ЦЕНТР-РАДИУС обчислимо по співвідношенню:

$$D_L = \sum_{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}} sign\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \times \prod_{u=1}^{n} \left(a_{i_u u} - r_{i_u u}\right); \quad (83)$$

таку ж межу, визначену у вигляді гіперболічних чисел, обчислимо за співвідношенням:

$$D_L = \sum_{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}} sign\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \times \prod_{u=1}^{n} \left(a_{i_u u}\left(ch(\phi_{i_u u}) - sh(\phi_{i_u u})\right)\right). \quad (84)$$

Праву межу чисельного значення визначника (81), визначену в системі ЦЕНТР-РАДИУС, обчислимо за співвідношенням:

$$D_R = \sum_{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}} sign\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \times \prod_{u=1}^{n} \left(a_{i_u u} + r_{i_u u}\right); \quad (85)$$

таку ж межу, визначену у вигляді гіперболічних чисел, обчислимо за співвідношенням:

$$D_R = \sum_{\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}} sign\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \times \prod_{u=1}^{n} \left(\rho_{i_u u}\left(ch(\phi_{i_u u}) + sh(\phi_{i_u u})\right)\right). \quad (86)$$

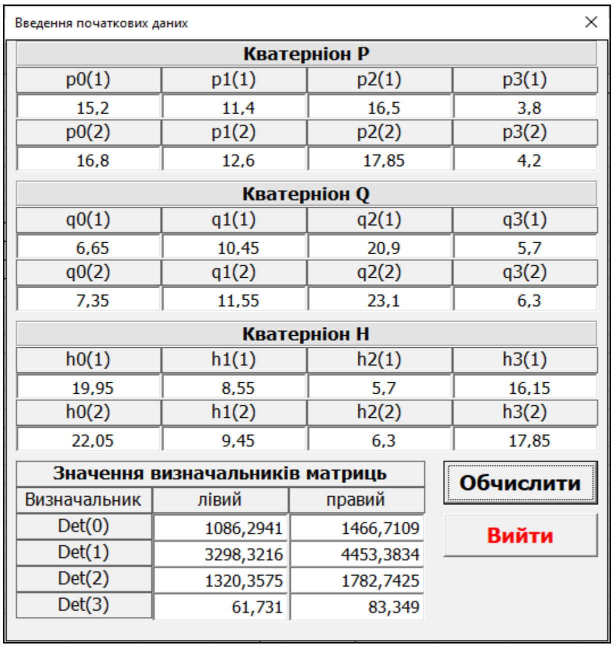
Чисельне значення визначника у вигляді інтервального числа, визначеного в класичній формі, отримаємо за співвідношенням (87):

$$[D] = [\min(D_L, D_R), \max(D_L, D_R)]. \quad (87)$$

Для обчислення цих визначників розроблено спеціальну процедуру. Введення вихідних даних для обчислення визначників організовано у вигляді відповідної форми. Після заповнення відповідних полів і натиснення кнопки "Обчислити" на ній же виводяться результати обчислення визначників восьми матриць, побудованих на основі введених даних (рис. 4). Завдяки такому розміщенню є можливість коригувати початкові дані, і повторним натисненням кнопки "Обчислити" отримати нові результати. Закривається форма кнопкою "Вийти".

Поля форми для введення числових даних мають унікальні імена, які відповідають умовним позначенням. Оскільки для обчислення визначників треба скористатися матрицями, побудованими з вихідних даних у різних комбінаціях, слушно для цього скористатися функціями, які надає Excel. Функція ВСТОЛБИК() дозволяє створити вертикальний масив з окремих даних (значень окремих полів форми), а функція ГСТОЛБИК() окремі стовпці, створені трьома вкладеними функціями ВСТОЛБИК(), перетворює на матрицю, яка передається на вхід функції МОПРЕД() для обчислення визначника матриці.

Слід зауважити, що функції ВСТОЛБИК() – англійська версія Vstack() і ГСТОЛБИК() – відповідно Hstack(), з'явилися лише починаючи з MS Office версії 365.


Введення початкових даних

Кватерніон P			
p0(1)	p1(1)	p2(1)	p3(1)
15,2	11,4	16,5	3,8
p0(2)	p1(2)	p2(2)	p3(2)
16,8	12,6	17,85	4,2

Кватерніон Q			
q0(1)	q1(1)	q2(1)	q3(1)
6,65	10,45	20,9	5,7
q0(2)	q1(2)	q2(2)	q3(2)
7,35	11,55	23,1	6,3

Кватерніон H			
h0(1)	h1(1)	h2(1)	h3(1)
19,95	8,55	5,7	16,15
h0(2)	h1(2)	h2(2)	h3(2)
22,05	9,45	6,3	17,85

Значення визначальників матриць		
Визначальник	лівий	правий
Det(0)	1086,2941	1466,7109
Det(1)	3298,3216	4453,3834
Det(2)	1320,3575	1782,7425
Det(3)	61,731	83,349

Обчислити

Вийти

Рис. 4. Форма для введення вихідних даних кватерніонів і обчислення визначників матриць
(Fig. 4. Screenshot a copy with a form for entering quaternion output data and calculating matrix determinants**)**

Обчислювальні формули представлено на рис. 5.

Завдяки використанню вкладених функцій відпадає необхідність будувати окремі матриці на аркуші Excel. Для зручності коміркам таблиці, на які посилаються розрахункові формули, надано імена близькі до імен полів форми, що дозволяє однозначно співставити їх з вихідними даними.

Розглянемо чисельний приклад. Згідно із співвідношенням (18) в класичній інтервальній формі векторний добуток кватерніонів, зображених на рис. 4, буде наступним:

$$[\mathbf{P}]\circ[\mathbf{Q}]\circ[\mathbf{H}] =$$

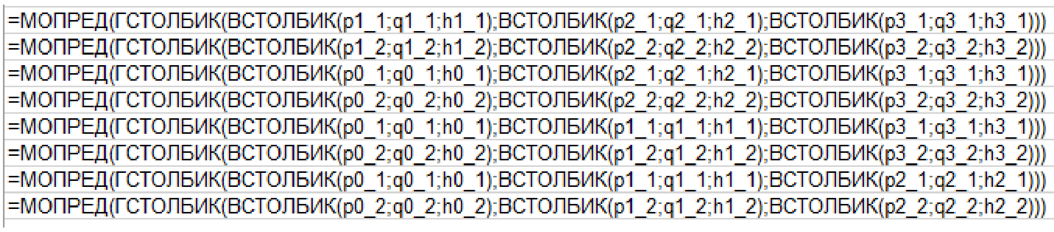
$$=(1086{,}2941;1466{,}7109)\text{-}\,(3298{,}3216;4453{,}3834)\,\vec{i}\, +$$

$$+(1320{,}3575;1782{,}7425)\,\vec{j}\,\text{-}(67{,}731;83{,}349)\,\vec{k}\,.$$

Використовуючи (22) і (24), величину поля допуску визначимо з співвідношення:

$$\Delta[A]=\frac{r_a}{a}=\frac{a_2-a_1}{a_2+a_1}\,. \tag{88}$$

При підготовці чисельних даних для цього прикладу умовно прийнято, що поле допуску інтервалу визначення коефіцієнтів при ортах всіх кватерніонів-співмножників - $\Delta[A]$ =5%.



```
=МОПРЕД(ГСТОЛБИК(ВСТОЛБИК(p1_1;q1_1;h1_1);ВСТОЛБИК(p2_1;q2_1;h2_1);ВСТОЛБИК(p3_1;q3_1;h3_1)))
=МОПРЕД(ГСТОЛБИК(ВСТОЛБИК(p1_2;q1_2;h1_2);ВСТОЛБИК(p2_2;q2_2;h2_2);ВСТОЛБИК(p3_2;q3_2;h3_2)))
=МОПРЕД(ГСТОЛБИК(ВСТОЛБИК(p0_1;q0_1;h0_1);ВСТОЛБИК(p2_1;q2_1;h2_1);ВСТОЛБИК(p3_1;q3_1;h3_1)))
=МОПРЕД(ГСТОЛБИК(ВСТОЛБИК(p0_2;q0_2;h0_2);ВСТОЛБИК(p2_2;q2_2;h2_2);ВСТОЛБИК(p3_2;q3_2;h3_2)))
=МОПРЕД(ГСТОЛБИК(ВСТОЛБИК(p0_1;q0_1;h0_1);ВСТОЛБИК(p1_1;q1_1;h1_1);ВСТОЛБИК(p3_1;q3_1;h3_1)))
=МОПРЕД(ГСТОЛБИК(ВСТОЛБИК(p0_2;q0_2;h0_2);ВСТОЛБИК(p1_2;q1_2;h1_2);ВСТОЛБИК(p3_2;q3_2;h3_2)))
=МОПРЕД(ГСТОЛБИК(ВСТОЛБИК(p0_1;q0_1;h0_1);ВСТОЛБИК(p1_1;q1_1;h1_1);ВСТОЛБИК(p2_1;q2_1;h2_1)))
=МОПРЕД(ГСТОЛБИК(ВСТОЛБИК(p0_2;q0_2;h0_2);ВСТОЛБИК(p1_2;q1_2;h1_2);ВСТОЛБИК(p2_2;q2_2;h2_2)))
```

Рис. 5. Формули для обчислення визначників матриць
(Fig. 5. Screenshot a copy with a Formulas for calculating determinants of matrices**)**

У цьому випадку поле допуску інтервалу визначення коефіцієнтів при ортах векторного добутку кватерніонів – $\Delta[D]$ = 35%. Отже, при виконанні технологічних розрахунків, зв'язаних з використанням кватерніонів, дослідження впливу похибок вимірювань на результат обчислень стає важливим завданням, що вимагає самостійного дослідження.

Висновки

1. Наведено визначення кватерніону, коефіцієнти при ортах якого є інтервальними числами.

2. Отримано співвідношення для визначення в інтервальній формі таких характеристик, як: норма кватерніону, модуль кватерніону, модуль векторної частини кватерніону, аргумент кватерніону, знак кватерніону.

3. Отримано співвідношення для визначення в інтервальній формі основних арифметичних дій: суми кватерніонів, різниці кватерніонів, множення сталої величини на кватерніон, скалярного добутку кватерніонів, добутку векторних частин кватерніонів, добутку кватерніонів, векторного добутку кватерніонів, лівостороннього та правостороннього ділення кватерніонів.

4. Отримано співвідношення для обчислення визначників другого порядку, елементи яких визначено в інтервальній формі.

5. Отримано співвідношення для наближеного обчислення визначників довільного порядку, елементи яких визначено в інтервальній формі.

6. Показано, що операції множення (ділення) інтервальних чисел та піднесення їх до цілочисельного степеня доцільно виконувати, коли вони мають гіперболічну форму. Операцію додавання (віднімання) доцільно виконувати з інтервальними числами, які подані у класичній формі або в системі ЦЕНТР-РАДІУС. Останню форму бажано використовувати у випадку визначення коефіцієнтів ортів кватерніону за результатами технологічних розрахунків.

7. Наведено скрін-копії формул для визначення векторного добутку кватерніонів, за умови, що коефіцієнти при їх ортах представлено інтервальними числами.

References

1. Horodetskyi, V.V. and Bodnaruk, S.B. (2021), *Introduction to the theory of hypercomplex numbers and their functions: teaching*, Chernivtsi National University, Chernivtsi, 136 p., available at: https://archer.chnu.edu.ua/jspui/handle/123456789/1521

2. Dubovyk, V.P. and Yuryk, I.I. (2006), *Higher mathematics*, A.S.K, Kyiv, 648 p., available at: https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/Dubovik_P1_2008_200.pdf
3. Arnold, V. (2002), *Geometry of complex numbers, quaternions and spins*, MCNMO, 40 p., available at: https://old.mccme.ru//free-books//izdano/2002/VIA-kvatern.pdf
4. Gordeev, V.N. (2016), *Quaternions and biquaternions with applications in geometry and mechanics*, Stal, Kyiv, 316 p., available at: https://www.researchgate.net/publication/326377622
5. Kantor, I.L. and Solodovnikov, A.S. (1973), *Hypercomplex numbers*, Nauka, 144 p. available at: https://retrokniga.com/allproduct/books/kantor-il-solodovnikov-as-giperkompleksnyie-chisla
6. Ilienko, M. and Runovska, L. (2015) "Quaternions as mathematical tools in computer graphics: methodological aspects", *Technical sciences and technologies*, No. 2 (2), pp. 124-128, available at: http://ir.stu.cn.ua/123456789/9973
7. John H., Conway (2003), *On quaternions and octonions: Their geometry, arithmetic, and symmetry*, A. K. Peters, Ltd, London, 159 p. available at: https://math.ucr.edu/home/baez/octonions/conway_smith/conway_smith.pdf
8. Synkov, M. V., Kalinovskyi, Ya. O., Postnikova, T. G., Synkova, T. V. and Boyarinova, Yu. E. (2005), "Algorithmic and software toolkit for analytical calculations on hypercomplex numbers in the computer mathematics system MAPLE", *Data Recording, Storage & Processing* 2005., Vol. 7, No. 2, pp. 18-25, available at: http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/50763
9. Kalinovsky, Ya. A., Boyarinova, Yu. E., Sukalo, A. S. and Khitsko, Ya. V. (2017), "System of hypercomplex operations in Maple", *Data Recording, Storage & Processing*, Vol. 19, No. 2, pp. 11-22, available at: http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/131674
10. Gadetska, S., Dubnitskiy, V., Kushneruk, Yu. and Khodyrev, A. (2022), "Performance of basic arithmetic actions with complex numb", Vol. 6, No. 3, pp. 104–113, doi: https://doi.org/10.20998/2522-9052.2022.3.11
11. Yaglom, I.M. (1963), *Complex numbers and their application in geometry*, NAUKA, 192 p., available at: https://math.ru/lib/book/djvu/yaglom/compl_num.djvu
12. Pan, L., Deng, Y. and Cheong, K.H. (2023), "Quaternion model of Pythagorean fuzzy sets and its distance measure", *Expert Systems with Applications*, Vol. 213, Part 1, 119222, doi: https://doi.org/10.1016/j.eswa.2022.119222
13. Pobegailo, A.P. (2019), *Application of quaternions in computer geometry and graphics*, BGU, Minsk, 222 p., available at: https://elib.bsu.by/bitstream/123456789/241677/1/Pobegailo.pdf
14. Zhukovska, O.A. (2009), *Basics of interval analysis*, Osvita Ukrajiny, Kyiv, 136 p., available at: https://z-lib.io/book/16508268
15. Hadetska, S.V., Dubnytskyi, V.Yu., Kushneruk, Yu.I, and Khodyriev, O.I. (2022), "Performing basic arithmetic operations with complex numbers, which are presented in interval hyperbolic form", *Advanced Information Systems*, Vol. 6, No. 1, pp. 104–113, doi: https://doi.org/10.20998/2522-9052.2022.1.17.
16. Bezushchak O.O (2019), *Study guide on linear algebra for mechanical engineering students*, VOC "Kyiv University", Kyiv, 224 p., available at: https://www.mechmat.univ.kiev.ua/wp-content/uploads/2019/11/linear-algebra.pdf
17. Richard J., Duffin, Elmor L., Peterson and Clarence, Zener (1967), *Geometric Programming*, John Wiley and Sons, New York, 278 p., available at: https://lib.ugent.be/catalog/rug01:000485203
18. Hoff, A. (2004), "The Linear Approximation of the CES Function with n Input Variables", *Marine Resource Economics*, Vol. 19, No. 3, pp. 295–306, available at: https://www.jstor.org/stable/42629436
19. Dubnitskiy, V., Kobylin, A., Kobylin, O., Kushneruk, Yu. and Khodyrev, A. (2023), "Calculation of harrington function (desirability function) values under interval determination of its arguments", *Advanced Information Systems*, Vol. 7, No. 1, pp. 71–81, doi: https://doi.org/10.20998/2522-9052.2023.1.12

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Городецький В. В., Боднарук С. Б. Вступ до теорії гіперкомплексних чисел та їх функцій: навч. пос. Чернівці : Чернівецький національний університет, 2021. 136 с. URL: https://archer.chnu.edu.ua/jspui/handle/123456789/1521
2. Дубовик В.П., Юрик І.І. Вища математика: навч. пос.. Київ: А.С.К. 2006, 648 с. URL: https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/Dubovik_P1_2008_200.pdf
3. Арнольд, В. Геометрия комплексных чисел, кватернионов *и* спинов. МЦНМО, 2002. 40 с. URL: https://old.mccme.ru//free-books//izdano/2002/VIA-kvatern.pdf
4. Гордеев В. Н. Кватернионы и бикватернионы с приложениями в геометрии и механике, Київ: Сталь, 2016. 316 с. URL: https://www.researchgate.net/publication/326377622
5. Кантор И.Л., Солодовников А.С. Гиперкомплексные числа. Наука, 1973. 144 с. URL: https://retrokniga.com/allproduct/books/kantor-il-solodovnikov-as-giperkompleksnyie-chisla
6. Ільєнко М. К., Руновська Л. А**.** Кватерніони як математичний апарат комп'ютерної графіки: методологічні аспекти. *Технічні науки та технології.* 2015. № 2 (2). С. 124-128. URL: http://ir.stu.cn.ua/123456789/9973
7. John H. Conway. On quaternions and octonions: Their geometry, arithmetic, and symmetry. A. K. Peters, Ltd, London, 2003. 159 p. URL: https://math.ucr.edu/home/baez/octonions/conway_smith/conway_smith.pdf
8. Синьков М. В., Каліновський Я. О., Постнікова Т. Г., Синькова Т. В., Боярінова Ю. Є. Алгоритмічно-програмний інструментарій аналітичних обчислень над гіперкомплексними числами в системі комп'ютерної математики MAPLE. *Реєстрація, зберігання і обробка даних.* 2005. Т. 7, № 2. С. 18-25. URL: http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/50763
9. Калиновский Я. А., Бояринова Ю. Е., Сукало А. С., Хицко Я. В. Система гиперкомплексных операций в Maple. *Реєстрація, зберігання і обробка даних.* 2017. Т. 19, № 2. С. 11-22. URL: http://dspace.nbuv.gov.ua/handle/123456789/131674
10. Гадецька С. В., В. Дубницький В. Ю., Кушнерук Ю. І., Ходирєв О. І. Обчислення значень функцій комплексної змінної з інтервальним аргументом, визначеним в гіперболічній формі. *Сучасні інформаційні системи*. 2022. Т. 6, № 3. С. 104–113. doi: https://doi.org/10.20998/2522-9052.2022.3.11
11. Яглом И. М. Комплексные числа и их применение в геометрии. НАУКА, 1963. 192 с. URL: https://math.ru/lib/book/djvu/yaglom/compl_num.djvu

12. Pan L., Deng Y., Cheong K.H. Quaternion model of Pythagorean fuzzy sets and its distance measure. *Expert Systems with Applications*. 2023. Vol. 213, Part 1. 119222. DOI: https://doi.org/10.1016/j.eswa.2022.119222
13. Побегайло А. П. Применение кватернионов в компьютерной геометрии и графике. Мінськ: БГУ, 2019. 222 с. URL: https://elib.bsu.by/bitstream/123456789/241677/1/Pobegailo.pdf
14. Жуковська О. А. Основи інтервального аналізу: навчальний посіб., Київ: Освіта України, 2009. 136 с. URL: https://z-lib.io/book/16508268
15. Гадецька С. В., Дубницький В. Ю., Кушнерук Ю. І., Ходирєв О. І. Виконання основних арифметичних дій з комплексними числами, які представлено в інтервальній гіперболічній формі. *Сучасні інформаційні системи*. 2022. Т. 6, № 1. С. 104–113. DOI: https://doi.org/10.20998/2522-9052.2022.1.17.
16. Безущак О. О. Навч. посібник з лінійної алгебри для студентів механіко-математичного факультету. Київ: ВПЦ "Київський університет", 2019. 224 с. URL: https://www.mechmat.univ.kiev.ua/wp-content/uploads/2019/11/linear-algebra.pdf
17. Richard J. Duffin, Elmor L. Peterson, Clarence Zener. Geometric Programming. New York; John Wiley and Sons, 1967. 278 p. URL: https://lib.ugent.be/catalog/rug01:000485203
18. Hoff A. The Linear Approximation of the CES Function with n Input Variables. *Marine Resource Economics.* 2004. Vol. 19, No. 3. P. 295–306. URL: https://www.jstor.org/stable/42629436
19. Дубницький В. Ю., Кобилін А. М, Кобилін О. А., Кушнерук Ю. І., Ходирєв О. І. Обчислення значень функції Харрінгтона (функції бажаності) при інтервальному визначенні її аргументів. *Сучасні інформаційні системи.* 2023. Т. 7, № 1. С. 71–81. DOI: https://doi.org/10.20998/2522-9052.2023.1.12.

Received (Надійшла) 28.08.2023
Accepted for publication (Прийнята до друку) 17.11.2023

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ / ABOUT THE AUTHORS

Гадецька Світлана Вікторівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики, Харківський національний автомобільно-дорожній університет, Харків, Україна;
Svitlana Gadetska – PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor, Associate Professor of Department of Higher Mathematics of Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv, Ukraine;
e-mail: svgadetska@ukr.net; ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-9125-2363.

Дубницький Валерій Юрійович – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, старший науковий співробітник Харківського навчально-наукового інституту "Каразінський банківський інститут" Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна, Харків, Україна;
Valeriy Dubnitskiy – PhD in Engineering Senior Researcher Senior Researcher of "Karazin Banking Institute" of V.N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine;
e-mail: dubnitskiy@gmail.com; ORCID ID: https://orcid.org/0000-0003-1924-4104.

Кушнерук Юрій Іонович – кандидат технічних наук, доцент, доцент Інституту цивільної авіації Харківського національного університету Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків, Україна;
Yuri Kushneruk – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate professor of Civil Aviation Institute of Ivan Kozhedub Kharkiv National Air Force University, Kharkiv, Ukraine;
e-mail: kyshneryk_ui@ukr.net; ORCID ID: https://orcid.org/0000-0001-5844-7137.

Ходирєв Олександр Іванович – старший викладач Харківського навчально-наукового інституту "Каразінський банківський інститут" Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна, Харків, Україна;
Alexander Khodyrev – Senior Lecturer of "Karazin Banking Institute" of V.N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine;
e-mail: khodyrevmjk3758@gmail.com; ORCID ID: https://orcid.org/0000-0001-9871-9440.

Calculation of the results of basic arithmetic operations with quaternions defined in the interval form

Svitlana Gadetska, Valeriy Dubnitskiy, Yuri Kushneruk, Alexander Khodyrev

Abstract. The goal of the work. Creation of an EXCEL-oriented calculator for determining the results of basic arithmetic operations with quaternions, which are given by hyperbolic interval numbers. The subject of research is the set of quaternions and arithmetic operations defined on this set. **Research method:** Algorithmic and numerical analysis of procedures for performing basic arithmetic operations with quaternions given by hyperbolic interval numbers. **The obtained results.** The definition of a quaternion, the coefficients of which are interval numbers, is given. It was obtained the ratios for determining in the interval form the following characteristics: quaternion norm, quaternion modulus, quaternion vector part modulus, quaternion argument, quaternion sign was obtained. It was obtained the ratios for determining in the interval form the following basic arithmetic operations: sum of quaternions, difference of quaternions, multiplication of a constant value by a quaternion, scalar product of quaternions, product of vector parts of quaternions, product of quaternions, vector product of quaternions, left and right division of quaternions. The ratio for calculating the determinants of the second order, the elements of which are defined in the interval form, is obtained. The ratio for the approximate calculation of determinants of arbitrary order, the elements of which are defined in the interval form, is obtained. It is shown that the operations of multiplication (division) of interval numbers and raising them to an integer power are expedient to perform when they have a hyperbolic form. It is advisable to perform the addition (subtraction) operation with interval numbers given in the classic form or in the CENTER-RADIUS system. It is better to use the last form in the case of determining the coefficients of the quaternions based on the results of technological calculations. Screenshots of the formulas for determining the vector product of quaternions are given, provided that the coefficients at their orths are represented by interval numbers.

Keywords: quaternions; arithmetic operations with quaternions; interval numbers.