

А. Ю. Воловик

Вінницький національний технічний університет, Вінниця, Україна

СИНТЕЗ КВАЗІОПТИМАЛЬНИХ ШВИДКОДІЮЧИХ ФІЛЬТРІВ З ПОЗИЦІЙ КРИТЕРІЮ НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

Анотація. Предметом досліджень статті є спеціальні методи обробки сигналів засновані на теорії оптимальної дискретної фільтрації. **Мета** – підвищення ефективності модельно-орієнтованих методів обробки інформаційних сигналів шляхом скорочення обчислювальних витрат і підвищення швидкодії алгоритмів оптимальної дискретної фільтрації. **Застосовувані методи:** опис динамічних процесів у термінах простору станів з використанням елементів векторно-матричної алгебри, метод зважених найменших квадратів, елементи теорії оптимальної дискретної фільтрації за Калманом, базові поняття теорії функціональних відновників О'Рейлі–Луенбергера, елементи теорії ймовірностей, статистичне моделювання за методом Монте-Карло. **Отримані результати:** запропоновано новий метод скорочення обчислювальних витрат, що використовує апроксимацію часової залежності матриці передачі фільтра Калмана заданими кусково-лінійними функціями відповідно до критерію найменших квадратів. Оцінена ефективність запропонованих варіантів апроксимацій. На основі порівняльного аналізу визначено декілька, прийнятних для практичної реалізації алгоритмів. **Практична значущість роботи** полягає у подальшому розвитку методів синтезу квазіоптимальних фільтрів підвищеної швидкодії. Працездатність запропонованих квазіоптимальних швидкодіючих фільтрів підтверджено на прикладі лінійної динамічної системи другого порядку. Показано, що сумарна економія в числі операцій множення й додавання може досягати десятків раз за рахунок незначних втрат у точності процесу фільтрації.

Ключові слова: фільтр Калмана; матричний коефіцієнт передачі; апроксимація; критерій найменших квадратів.

Вступ. Аналіз джерел

Вже більш ніж пів століття методи оптимальної лінійної фільтрації, розроблені Калманом і Бьюси в рамках концепції змінних стану, знаходять саме широке застосування в різних галузях науки й техніки, пов'язаних із проблемою оцінювання станів динамічних систем у присутності випадкових збурень. Основний результат даних робіт є загально відомим і представлений у вигляді системи різнице-вих рівнянь для фільтра і його коефіцієнту підсилення [1, 2].

$$\mathbf{x}(k/k) = \mathbf{A}(k, k-1)\mathbf{x}(k/k-1); \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k/k) &= \mathbf{x}(k/k-1) + \\ &+ \mathbf{K}(k) [\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k/k-1)]; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(k) &= \mathbf{P}(k/k-1)\mathbf{C}(k) \times \\ &\times [\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k/k-1)\mathbf{C}(k) + \mathbf{R}(k)]; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k/k-1) &= \\ &= \mathbf{A}(k, k-1)\mathbf{P}(k-1/k-1)\mathbf{A}(k, k-1) + \\ &+ \mathbf{B}(k, k-1)\mathbf{Q}(k-1/k-1)\mathbf{B}(k, k-1); \end{aligned} \quad (4)$$

$$\mathbf{P}(k/k) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}(k)]\mathbf{P}(k/k-1). \quad (5)$$

З часом були досліджені зв'язки з іншими процедурами оцінювання, наприклад, з байєсівськими, максимуму правдоподібності, мінімуму середньоквадратичної помилки, методом Гауса й іншими [3–6]. Показово, що незалежно від типу процедури оцінювання структура рівнянь рекурентного фільтра залишалася інваріантною, за винятком чисельних значень матриці передачі, обумовлених доступними апріорними даними. До теперішнього часу прийнято вважа-

ти, що тема лінійної дискретної фільтрації докладно й всебічно вивчена. Поряд з цим, у ряді практичних застосувань, що стосуються високо динамічних систем реального часу, виникають питання, пов'язані обчислювальними витратами, необхідним обсягом оперативної пам'яті, числом операцій множення й додавання, у кінцевому рахунку визначаючих швидкодію алгоритму фільтрації. На початку цього шляху користувалися загально відомим фактом, що при обчисленнях матричного коефіцієнта передачі оптимального лінійного фільтра результати фактичних вимірів не використовуються і обчислення оцінок засновано винятково на апріорно заданих системних матрицях. Отже, частина алгоритму (2)–(4) може бути виконана до початку процедури фільтрації, а обчислена послідовність матриць передачі повинна зберігатися в оперативній пам'яті аж до її використання в певний момент часу. При цьому властивість оптимальності фільтра зберігається, а найбільш відчутний вираш в рахунок часу буде спостерігатися для систем з постійними параметрами.

Подальша економія обчислювальних витрат може бути отримана при представленні оптимального фільтра Калмана у вигляді стохастичного спостерігача Луенбергера [7]

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k/k) &= [\mathbf{A}(k, k-1) - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}(k)] \times \\ &\times \mathbf{x}(k-1/k-1) + \mathbf{K}(k)\mathbf{y}(k). \end{aligned} \quad (6)$$

Тут компоненти матриці передачі $\mathbf{K}(k)$ визначаються шляхом завдання власних значень системної матриці $(\mathbf{A} - \mathbf{K}\mathbf{C})$ в межах кола одиничного радіуса, що гарантує її стійкість і водночас надає більшу вільність у виборі цих коефіцієнтів. Для збереження прийнятної якості оцінювання рекомендується вибирати вищезгадані власні значення поблизу полюсів досліджуваної системи. Отриману структуру

спостерігача повного порядку можливо ще трохи спростити використовуючи спостерігач заниженого порядку. У цілому такі фільтри є квазіоптимальними, а їх параметри залишаються незмінними в часі. Цей підхід отримав подальший розвиток у роботі [8], де запропоновано так звану каскадну схему спостерігача, що складається із сукупності послідовно з'єднаних спостерігачів заниженого порядку. Її застосування виявилось ефективним стосовно до нелінійних систем високого порядку, які були призначені для роботи в ковзних режимах. Відомі методи декомпозиції розширеного фільтра Калмана, засновані на застосуванні ортогональних $U-V$ перетвореннях [9–12], що приводять коваріаційні матриці помилок екстраполяції й фільтрації до діагонального виду. Це дозволяє апроксимувати розширений фільтр Калмана паралельною структурою у вигляді банку автономно працюючих фільтрів зниженої розмірності, що в остаточному підсумку сприяє скороченню обчислювальних витрат, збільшуючи тим самим швидкість обробки результатів спостережень. Оскільки вихід вищезгаданої паралельної структури не є еквівалентним до виходу розширеного фільтра Калмана, то результат синтезу також є квазіоптимальним. В роботі [13] було запропоновано локально-оптимальний варіант фільтра, у якому оптимальність, у змісті мінімуму середньоквадратичної помилки, зберігається в межах дії уведених обмежень, що накладаються на структуру системних матриць. Нескладно помітити, що вищенаведені методи засновані на процедурах спрощення вихідної структури оптимального фільтра й відмови від оптимальності перехідного процесу, що побічно сприяє збільшенню швидкодії за рахунок прийнятної втрати точності оцінювання для систем з відносно повільною динамікою. На відміну від вищевикладеного, у даній роботі пропонується систематична процедура безпосередньої апроксимації матричного коефіцієнта передачі оптимального фільтра Калмана, що заснована на критерії найменших квадратів. Подібні питання частково розглядалися в роботах [14–16]. Так, наприклад, в [14] використовувалася апроксимація імпульсної характеристики фільтра в далекомірній системі кусково-постійними функціями із кроком $2-N$, де N – розрядність регістру пам'яті. Однак, вибір цих функцій визначався винятково зручностями реалізації фільтра на елементах середнього ступеня інтеграції, а точність апроксимації не розглядалася. Пізніше, у роботах [15, 16] вибір прийнятних значень матричного коефіцієнта передачі рекурсивного фільтра здійснювався на основі розв'язку системи лінійних рівнянь методом ітерацій, при цьому для знаходження коваріаційних матриць помилок оцінювання й екстраполяції застосовувався метод розширення вектора стану і його фундаментальної матриці. Практика застосування рекурсивних фільтрів показує, що у багатьох випадках складність ітераційних обчислень не представляється виправданою для відносно простих траєкторій зміни вектора стану контрольованої системи.

$$P(k/k) = [I - K(k)C(k)]P(k/k-1)[I - K(k)C(k)] + K(k)R(k)K(k). \quad (7)$$

Постановка задачі та результати

Сутність запропонованого методу буде продемонстрована на прикладі системи другого порядку, спрощена модель якої описує еволюцію кута місця повітряного судна, що заходить на посадку в режимі горизонтального польоту із застосуванням навігаційного встаткування посадкової системи сантиметрового діапазону і описується наступними рівнями

$$\begin{aligned} x(k+1) &= A(k+1, k)x(k) + B(k+1, k)w(k); \\ y(k) &= C(k)x(k) + v(k); \end{aligned} \quad (7)$$

де $x(k) = [x_1(k), x_2(k)]$ – вектор стану системи, що складається з значення кута місця повітряного судна та швидкості його зміни відповідно; $y(k)$ – результат вимірювань кута місця. Априорні дані й обґрунтування моделі детально описані в монографії [17]:

$$\begin{aligned} A(k+1, k) &= \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad B(k+1, k) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ C(k) &= [1 \quad 0] - \end{aligned}$$

системні матриці, відповідних розмірностей, T – інтервал дискретизації. $w(k)$, $v(k)$ – некорельовані гаусові білі послідовності з нульовими середніми значеннями і заданими коваріаційними матрицями $Q(k)$, $R(k)$, відповідно. Початкові дані для проведення моделювання наведені в табл. 1.

Таблиця 1 – Априорні дані для дільниці горизонтального польоту

Параметр	Позначення	Числове значення	Розмірність
Початкове значення оцінки кута місця	$x_1(0/0)$	0.7000	град.
Початкове значення оцінки швидкості	$x_2(0/0)$	0.1500	град./с
Дисперсія значення кута місця	$P_{11}(0/0)$	0.4900	(град.) ²
Дисперсія швидкості зміни кута місця	$P_{22}(0/0)$	0.1600	(град./с) ²
Інтервал дискретизації	T	0.0247	с
Коваріаційна матриця збурень	$Q(k)$	0.0001	(град./с) ²
Коваріаційна матриця помилок вимірів	$R(k)$	0.0081	(град.) ²

Результати оцінювання у відповідності з (1)–(4) відображені на рис. 1.

Перш ніж переходити від оптимальної структури пристрою обробки результатів кутових вимірів до його практичного аналога доцільно здійснити пошук варіантів побудови дискретних фільтрів з підвищеною швидкістю, зрівняти їхні якісні показники точності з оптимальними, і на цій основі сформулювати обґрунтовані вимоги до обчислювальної потужності процесора. В рахунок втрати оптимальності, коваріаційна матриця помилок фільтрації повинна розраховуватися на підставі формули, слушної для довільної матриці передачі [1]:

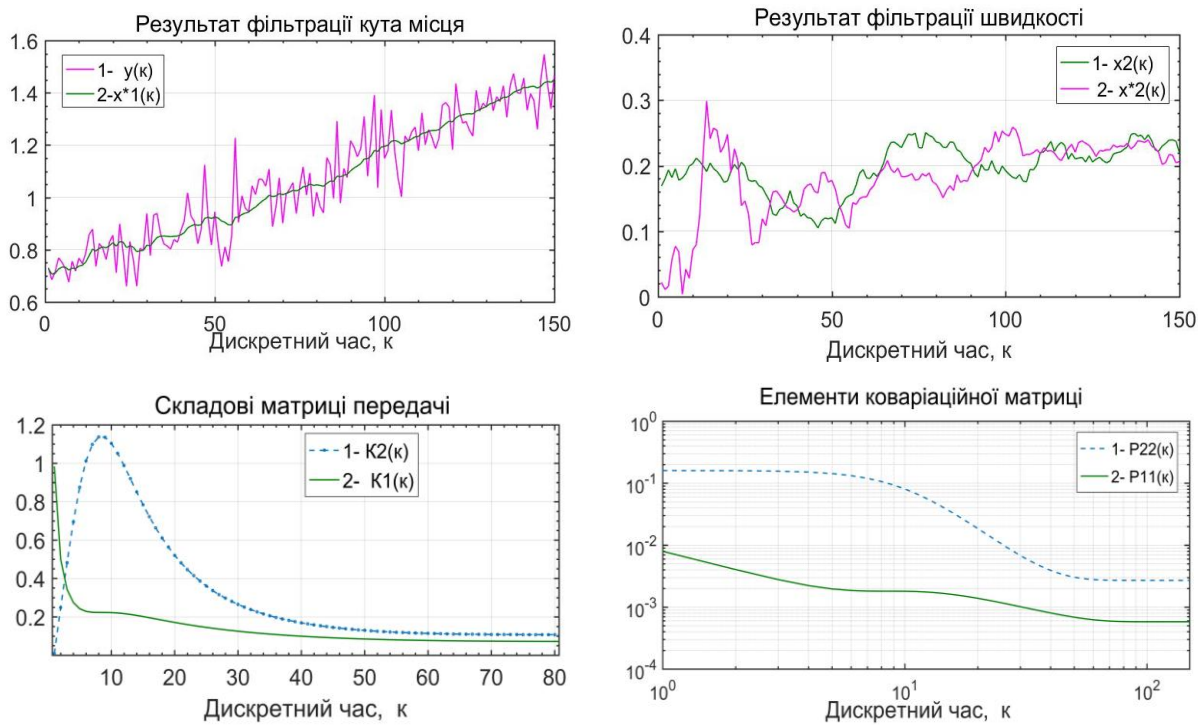


Рис. 1. Оцінки параметрів посадкової траєкторії фільтром Калмана
(Fig. 1. Estimates of landing trajectory parameters using the Kalman filter)

Ефективність варіантів апроксимацій матричного коефіцієнта передачі оцінювалася шляхом нормування показників точності до відповідних показників точності оптимального фільтра Калмана, отриманих за результатами імітаційного моделювання з використанням апріорних даних табл. 1. У процесі пошуку розглядалися наступні варіанти побудови фільтрів підвищеного швидкодії:

Варіант 1. Тут використовується фільтр із постійними в часі параметрами, який мінімізує середньоквадратичну помилку у сталому режимі. Skorиставшись методикою роботи [18], можливо показати, що при заданих умовах польоту й апріорних даних щодо системних шумів збурень $Q(k)=0,0001$ і шумів збурень вимірів $R(k)=0,0081$ елементи матриці передачі фільтра Вінера будуть дорівнювати $K_1(k) = 0,24$ і $K_2(k) = 0,02$, а тривалість перехідного процесу становить приблизно 0,5 с. Щодо дисперсії помилок оцінювання кута місця, то вони починаючи з 200-го такту приблизно однакові, а у сталому режимі збігаються (див. рис. 2а). Що стосується перехідного режиму для оцінок швидкості зміни кута місця повітряного судна, то тут фільтр Калмана має якісні показники більш ніж на порядок кращі. Повільну збіжність оцінок швидкості, частково, можна пояснити відсутністю відповідних вимірів, але головна причина все таки криється в тому, що фільтр Вінера не призначений для оптимізації помилок у перехідному режимі.

Крім того, передбачається, що результати фільтрації повинні надходити в систему керування польотом. Це означатиме, що на них поширюються обмеження пов'язані зі швидкодією й стійкістю контуру керування в цілому. Оскільки виконання посадкового маневру у вертикальній площині вимагає обмеження тривалості перехідного процесу фі-

льтра до величини 0,5 с. при ручному керуванні, і 0,1–0,25 с. при застосуванні автопілота [19], то високий рівень помилок у перехідному режимі виключає використання фільтра Вінера у швидкоплинному процесі посадки повітряного судна.

Варіант 2. За аналогічною методикою можливо розраховувати елементи матриці передачі квазіоптимального фільтра $K_1(k)$ і $K_2(k)$, виходячи із заданої тривалості перехідного процесу, наприклад, $t_n=0,2$ с. Вони становлять 0,267 і 0,183, відповідно. Посилаючись на рис. 2б, можна помітити, що істотних змін у перехідному режимі не відбулося. Вище наведені приклади показують, що вимоги заданої тривалості перехідного процесу й мінімізації середньоквадратичних помилок є взаємно суперечливими, а можливого компромісу, можна досягти лише за допомогою фільтрів зі змінними параметрами.

Далі пошук варіантів побудови квазіоптимальних фільтрів зі змінними параметрами здійснювався шляхом апроксимації часових залежностей $K_1(k)$ і $K_2(k)$ кусочно-постійними функціями за критерієм найменших квадратів. Результати пошуку відображені в табл. 2.

Варіанти 3–4. У варіанті 3 вдало поєднуються простота процедури керування коефіцієнтами передачі $K_1(k)$ і $K_2(k)$ з високою точністю оцінювання кута місця повітряного судна. Відповідно до табл. 2 для збереження апроксимованих часових залежностей $K_1(k)$ і $K_2(k)$ необхідно не більш п'яти комірок оперативної пам'яті: дві для $K_1(k)$ і три для $K_2(k)$. Щодо точності оцінювання кута місця повітряного судна, то процедура фільтрації за варіантом 3 уступає фільтру Калмана в перехідному режимі не більше ніж на 40%. У встановленому режимі ці показники практично збігаються.

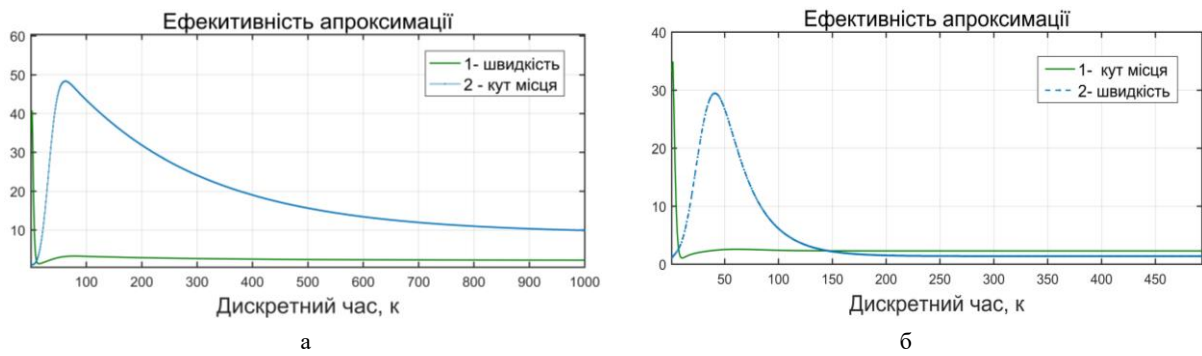


Рис. 2. Ефективність апроксимації матричного коефіцієнта передачі постійними величинами (Fig. 2. Effectiveness of the approximation of the matrix transmission coefficient by constant values): а – для фільтра Вінера; б – фільтра із заданою тривалістю перехідного процесу

Таблиця 2 – Види апроксимацій коефіцієнтів $K_1(\kappa)$ і $K_2(\kappa)$ кусково-постійними функціями

	Вид апроксимації $K_1(\kappa)$	Значення $K_1(\kappa)$	Вид апроксимації $K_2(\kappa)$	Значення $K_2(\kappa)$
3		$K_1(1)=1.0;$ $K_1(2) - K_1(15)=0.32;$ $K_1(16) - K_1(300)=0.1.$		$K_2(1) - K_2(2)=0.0;$ $K_2(3) - K_2(14)=1.0;$ $K_2(15) - K_2(34)=0.34;$ $K_2(35) - K_2(300)=0.12.$
4		$K_1(1) - K_1(2)=0.95;$ $K_1(3) - K_1(5)=0.25;$ $K_1(6) - K_1(20)=0.2;$ $K_1(21) - K_1(40)=0.15;$ $K_1(41) - K_1(300)=0.07.$		$K_2(1) - K_2(2)=0.0;$ $K_2(3) - K_2(5)=0.80;$ $K_2(6) - K_2(15)=1.08;$ $K_2(16) - K_2(31)=0.40;$ $K_2(32) - K_2(50)=0.17;$ $K_2(51) - K_2(300)=0.11.$
5		$K_1(1) - K_1(2)=1.0;$ $K_1(3) - K_1(300)=0.1.$		$K_2(1) - K_2(3)=0.0;$ $K_2(4) - K_2(23)=1.0;$ $K_2(24) - K_2(300)=0.10.$

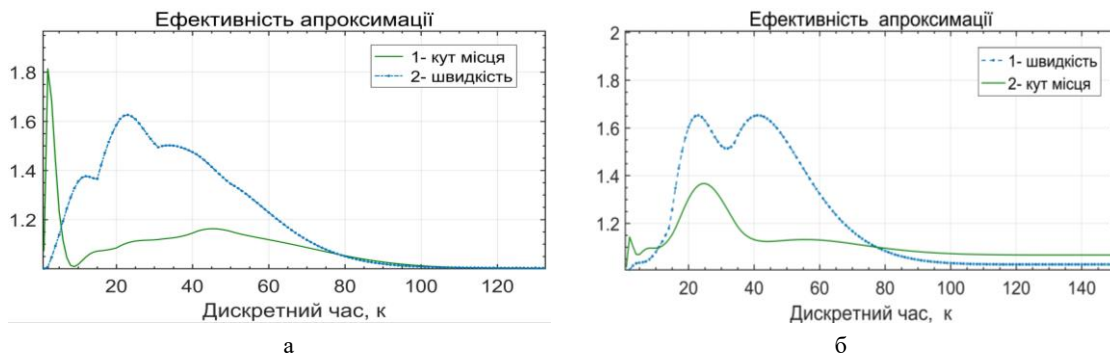


Рис. 3. Ефективність апроксимацій за варіантами 3–4 (Fig. 3. Efficiency of approximations according to options 3–4)

Більш детальна апроксимація залежностей $K_1(\kappa)$ і $K_2(\kappa)$ властива варіанту 4 (табл. 2). Деталізація ускладнює процес керування матричним коефіцієнтом передачі й на фоні відсутності істотного поліпшення точності оцінювання кута місця. Більше того, 10-15% підвищення точності фільтрації в порівнянні з варіантом 3 (рис. 3б) обмінюється на трикратне збільшення обсягу пам'яті. Тому з погляду простоти технічного розв'язку поставленого завдання перевага слід віддавати варіанту за номером 3.

Варіант 5 ілюструє помилковий розв'язок розглянутого завдання, а саме бажання звести перехідний процес у системі до декількох ітерацій за рахунок імпульсного розширення смуги пропускання

згладжуючого фільтра. На цих тактах коефіцієнти передачі $K_1(\kappa)$ і $K_2(\kappa)$ одночасно прирівнюються до одиниці (див. табл. 2), що відповідає абсолютній вірогідності результатів вимірювання. Внаслідок цього функція згладжування втрачається. Незважаючи на такі вжиті заходи, точність оцінювання кутів координат у порівнянні з фільтром Калмана стає гірше в 3-4 рази (рис. 4), а перехідний процес виходить надмірно затяжним. Причина цього полягає в тому, що раптове розширення смуги пропускання фільтра дійсно швидко зменшує динамічну складову помилки оцінювання кута місця повітряного судна, але за рахунок різкого зростання шумової складової.

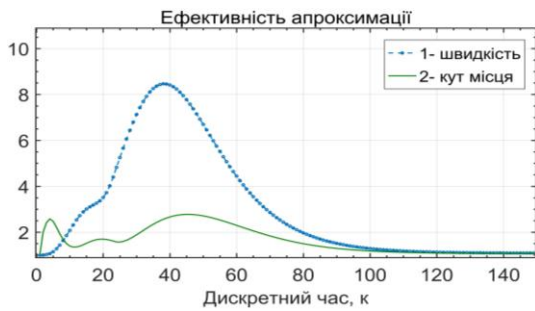


Рис. 4. Ефективність апроксимації за варіантом 5
(Fig. 4. Efficiency of approximation according to option 5)

Для варіантів 3-4, що представляють найбільший практичний інтерес, проведемо більш ретельну оцінку обчислювальних витрат, скориставшись при цьому результатами роботи [20, 21] з наступним порівнянням отриманих показників аналогічними показниками фільтра Калмана. Кількість комірок оперативної пам'яті, необхідних для реалізації рівнянь (1)-(5), визначалося розмірністю відповідних векторів і матриць. Ці відомості наведені в табл. 3. Результати підрахунку числа операцій додавання й множення, необхідних для обчислення оптимальних оцінок станів на окремому ітераційному кроці, наведено в табл. 4.

Таблиця 3 – Потреба у комірках пам'яті ОЗП для фільтра Калмана

Змінна	$x(k/k-1)$	$x(k/k)$	$A(k, k-1)$	$K(k)$	$y(k)$	$C(k)$	$R(k)$	$Q(k)$	$B(k, k-1)$	$P(k-1)$	$P(k)$
Розмірність	$n \times 1$	$n \times 1$	$n \times n$	$n \times m$	$m \times 1$	$m \times n$	$m \times m$	$q \times q$	$n \times q$	$n \times n$	$n \times n$
Число комірок пам'яті ОЗП	n	n	n^2	nm	m	mn	m^2	q^2	nq	n^2	n^2

Таблиця 4 – Потреба в числі операцій додавання й множення на окремому ітераційному кроці

Обчислювальне значення	Рівняння фільтрації	Етапи обчислення	Число множень	Сумарне число множень	Число додавань	Сумарне число додавань
$x(k-1/k-1)$	(1)	$A(k, k-1)x(k-1/k-1)$;	n^2	n^2	$(n-1)n$	$(n-1)n$
$x(k/k)$	(2)	$C(k)x(k-1/k-1)$ $[y(k) - C(k)x(k-1/k-1)]$ $K(k)[y(k) - C(k)x(k-1/k-1)]$ $x(k/k)$	mn — nm —	— — 2 —	$(n-1)m$ m $n(m-1)$ n	$2nm$
$K(k)$	(3)	$P(k-1)C^T(k)$ $C(k)[P(k-1)C^T(k)]$ $C(k)P(k-1)C^T(k) + R(k)$ $[C(k)P(k-1)C^T(k) + R(k)]^{-1}$ $K(k)$	n^2m nm^2 — m^3 n^3	— — $m(m^2 + 2nm + n^2)$ —	$nm(n-1)$ $(n-1)m^2$ m^3 $nm(m-1)$	$nm(n+2m-2) + m^3$ $nm(n+2m-2) + m^3$
$P(k-1)$	(4)	$P(k-1)A^T(k, k-1)$ $A(k, k-1)[P(k-1)A^T(k, k-1)]$ $Q(k-1)B^T(k, k-1)$ $B(k, k-1)[Q(k-1)B^T(k, k-1)]$ $A(k, k-1)[P(k-1)A^T(k, k-1)] +$ $+B(k, k-1)[Q(k-1)B^T(k, k-1)]$	n^3 nq^2 n^2q —	— — $2n^3 + nq^2 + n^2q$ —	$n^2(n-1)$ $n^2(n-1)$ $nq(q-1)$ $n^2(q-1)$ n^2	$2n^2(n-1) + nq(q+n-1)$
$P(k/k)$	(5)	$K(k)C(k)$ $I - [K(k)C(k)]$ $[I - K(k)C(k)]P(k-1)$	— n^3	— $n^2(n+m)$	$m(n-1)$ n^2 $n(n-1)$	$n^2(n+m-1)$
Загальне число операцій множення:			$M(n, m, q) = 3n^3 + 2n^2m + 2nm^2 + n^2q + nq^2 + 2nm + m^3 + n^2$			
Загальне число операцій додавання:			$A(n, m, q) = 3n^3 + 2n^2m + 2nm^2 + n^2q + nq^2 + m^3 - 2n^2 - nq$			

У тому випадку, коли через лінійність фільтра елементи матричного коефіцієнта передачі не залежать від результатів спостережень і можуть бути обчисленими на підставі апріорних даних, у реаль-

ному масштабі часу слід обчислювати тільки поточні оцінки за формулами (1)-(2). При цьому загальне число операцій множення й додавання скорочується до величин:

$$M(n, m, q) = n(n + 2m);$$

$$(n, m, q) = n(n + 2m - 1).$$

Стосовно до розглянутого прикладу, у якому $n = 2$, $m = q = 1$, ці величини рівні

$$M_I(2, 1, 1) = 8 \quad \text{й} \quad A_I(2, 1, 1) = 6$$

відповідно.

Для порівняння, повноформатному варіанту фільтра Калмана для отримання оптимальних оцінок вектора стану буде потрібно число множень $M(2, 1, 1) = 51$, а число додавань – $A(2, 1, 1) = 33$. Неважко помітити, що ріст обчислювальних витрат нелінійно залежить від порядку розглянутої системи й у першому наближенні оцінюється третім степенем від розмірності вектора стану.

Крім того, підсумковий обсяг обчислювальних витрат можна ще суттєво зменшувати, якщо врахувати, що запропонований метод апроксимації відповідно до результатів п. 3-5 табл. 2 скорочує число

необхідних ітерацій на етапі перехідного процесу як мінімум на порядок.

Висновки

1. Розглянуті методи скорочення обсягу обчислювальних витрат, що приводять у підсумку до спрощення структури оптимального фільтра Калмана й підвищенню його швидкодії.

2. Запропонований метод скорочення підсумкових обчислювальних витрат, заснований на апроксимації часової залежності матриці передачі фільтра Калмана кусково-постійними функціями за критерієм найменших квадратів.

3. Ефективність методу продемонстрована на прикладі динамічної системи другого порядку. Шляхом порівняльного аналізу запропоновано декілька варіантів шуканої апроксимації. Показано, що досяжна економія в числі операцій множення й додавання може досягати десятка разів при незначній втраті точності процесу фільтрації/

REFERENCES

1. Bozic, S.M. (2018), *Digital & Kalman Filtering. An Introduction to Discrete-Time Filtering & Optimum Linear Estimation*, Dover publications, INC: Mineola, New York, 240 p.
2. Chui, C. (2018), *Kalman Filtering: with Real-Time Applications*, Springer; Softcover reprint of the original 5th ed. 265 p.
3. Calin, O. (2021), *Informal Introduction To Stochastic Calculus With Applications*, WSPC; 2nd edition, 510 p.
4. Davis, B. and Blair, W. (2018), "Maximum likelihood mixture modeling for three-dimensional non-Gaussian measurements", *IEEE Radar Conference*, Oklahoma City, OK, USA, pp. 1027-1032, doi: <https://doi.org/10.1109/RADAR.2018.8378702>.
5. Gakis, G. and Smith, M. A (2022), "Deterministic Least Squares Approach for Simultaneous Input and State Estimation", *IEEE Transactions on Automatic Control*, pp. 1 – 16, doi: <https://doi.org/10.1109/TAC.2022.3209415>.
6. Yang, J.N., Pan, S. and Huang, H. (2007), "An adaptive extended Kalman filter for structural damage identifications. II: Unknown inputs", *Structural Control and Health Monitoring* 14, pp. 497–521, doi: <https://doi.org/10.1002/stc.171>.
7. O'Reilly, J. (2007), *Observers for Linear Systems*, Academic Press, 258 p.
8. Krasnova, S.A. and Utkyn, V.A. (2006), *Kaskadniy sintez nabliudatelei sostoiyaniya dynamicheskoykh sistem*, [Cascade Synthesis of Dynamical Systems State Observers] Yn-t problem upravleniya ym. V.A. Trapeznikova. RAN, Nauka, 272 p.
9. Alouani, A.T., Rice, T.R and Blair, W.D. (2007), "A two-stage filter for state estimation in the presence of dynamical stochastic bias", *Proceedings of the American Control Conference*, Chicago, IL, pp.1784–88. doi: <https://doi.org/10.23919/ACC.1992.4792418>.
10. Volovyk, A.Yu., Kychak, V.M. and Havrilov, D.V. (2021), "Discrete Kalman Filter Invariant to Perturbations". *Acta Polytechnica Hungarica*, Vol. 18, No. 10, pp. 21-41, doi: <https://doi.org/10.12700/APH.18.10.2021.10.2>.
11. Volovyk, A., Kychak, V., Osadchuk, A., Zhurakovskiy, B. (2023). "Fault Identification in Linear Dynamic Systems by the Method of Locally Optimal Separate Estimation", *Emerging Networking in the Digital Transformation Age. TCSET 2022. Lecture Notes in Electrical Engineering*, vol 965. Springer, Cham., pp.634-651, doi: https://doi.org/10.1007/978-3-031-24963-1_37.
12. Marelli, D., Sui, T. and Fu, M. (2021), "Distributed Kalman estimation with decoupled local filters", *Automatica*, Vol.132, 109793, doi: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2021.109724>.
13. Hsieh, C.S. (2007), "Extension of the robust two-stage Kalman filtering for systems with unknown inputs", *TENCON 2007, IEEE Region 10 Conference*, Taipei, Taiwan, pp. 1-4, doi: <https://doi.org/10.1109/TENCON.2007.4429133>.
14. Syromiatnykov, R.F. (1975), "Yssledovanye pomekhoustoichyvosty alhorytmov mnogokanalnogo yzmeritelia dalnosti v sisteme avtomatizirovannogo upravleniya poletamy", [Investigation of the noise immunity of algorithms for a multi-channel range meter in an automated flight control system], Kand. Dissertation, LETY, 251p.
15. Avtin, I. V., Baburov, V. I., and Ponomarenko, B. V. (2021), *Principles of Integrated Airborne Avionics*, Springer Aerospace Technology, Springer; 1st ed., 719 p.
16. Henningsson, T. (2007), "Recursive state estimation for linear systems with mixed stochastic and set-bounded disturbances", *47th IEEE Conference on Decision and Control*, Cancun, Mexico, 2008, pp. 678-683, doi: <https://doi.org/10.1109/CDC.2008.4739139>.
17. Kychak, V.M., Volovyk, A.Iu and Volovyk, Yu. (2011), *Metody ta prystroi obrobky radiosyhnaliv bortovykh aviatsiynykh sistem posadky*, [Methods and devices for radio signals processing of airborne aircraft landing systems], Monohrafiya, Vinnytsia, VNTU, 208 p.
18. Pervachev, S.V., Valuev, A.A. and Chylykyn, V.M. (1973), *Statystycheskaia dynamika radyotekhnicheskikh slediashchikh sistem*, [Statistical dynamics of radio tracking systems], M.: Sov. radyo, 488 p.
19. Stengel, R. (2022), *Flight Dynamics: Second Edition 2nd Edition*, Princeton University Press; 2nd edition, 912 p.
20. Hsieh, C.S. and Chen, F.C. (1999), "Optimal solution of the two-stage Kalman estimator", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, no. 1, pp. 194-199, doi: <https://doi.org/10.1109/9.739135>.
21. Lo, K., Lu, Q., and Kwon, W. (2022), "Comments on "Optimal solution of the two-stage Kalman estimator"", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 47, no. 1, pp. 198-199, doi: <https://doi.org/10.1109/9.981745>.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Bozic S. M. Digital & Kalman Filtering. An Introduction to Discrete-Time Filtering & Optimum Linear Estimation. Dover publications, INC: Mineola, New York. 2018, 240 p.
2. Chui C. Kalman Filtering: with Real-Time Applications. Springer; Softcover reprint of the original 5th ed, 2018, 265 p.
3. Calin O. Informal Introduction to Stochastic Calculus with Applications. WSPC; 2nd edition, 2021. 510 p.
4. Davis B., Blair W. Maximum likelihood mixture modeling for three-dimensional non-Gaussian measurements, *IEEE Radar Conference*. Oklahoma City, OK, USA. 2018. P. 1027-1032. DOI: <https://doi.org/10.1109/RADAR.2018.8378702>.
5. Gakis G., Smith M., A Deterministic Least Squares Approach for Simultaneous Input and State Estimation, *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2022, P. 1 - 16. DOI: <https://doi.org/10.1109/TAC.2022.3209415>.
6. Yang J.N., Pan S., Huang, H. An adaptive extended Kalman filter for structural damage identifications. II: Unknown inputs. *Structural Control and Health Monitoring* 14, 2007. P. 497–521. DOI: <https://doi.org/10.1002/stc.171>
7. O'Reilly J. Observers for Linear Systems. Academic Press, 2012. 258 p.
8. Краснова С.А., Уткін В.А. Каскадний синтез спостерігачів стану динамічних систем. М.: Наука, 2006. 272 с.
9. Alouani A.T., Rice T.R., Blair W.D. A two-stage filter for state estimation in the presence of dynamical stochastic bias. *Proc. of the American Control Conference*. 1992. Chicago, IL. P. 1784–1788. DOI: <https://doi.org/10.23919/ACC.1992.4792418>.
10. Volovyk A.Yu., Kychak V.M., Havrilov D.V. Discrete Kalman Filter Invariant to Perturbations. *Acta Polytechnica Hungarica*. 2021. Vol. 18, No. 10. P. 21-41. DOI: <https://doi.org/10.12700/APH.18.10.2021.10.2>.
11. Volovyk A., Kychak V., Osadchuk A., Zhurakovskiy B. Fault Identification in Linear Dynamic Systems by the Method of Locally Optimal Separate Estimation. Emerging Networking in the Digital Transformation Age. TCSET 2022. *Lecture Notes in Electrical Engineering*. 2023. Vol 965. Springer, Cham. P. 634-651. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-031-24963-1_37.
12. Marelli D., Sui T., Fu M. Distributed Kalman estimation with decoupled local filters. *Automatica*. Vol. 132, October 2021, 109793. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2021.109724>.
13. Hsieh C.S. Extension of the robust two-stage Kalman filtering for systems with unknown inputs. *TENCON 2007, IEEE Region 10 Conference*. Taipei, Taiwan, 2007. P. 1-4. DOI: <https://doi.org/10.1109/TENCON.2007.4429133>.
14. Сиром'ятників Р.Ф. Дослідження завадостійкості алгоритмів багатоканального вимірювача дальності у системі автоматизованого управління польотами. Л.: ЛІТІ, 1975.
15. Avtin I. V., Baburov V. I., Ponomarenko B. V. Principles of Integrated Airborne Avionics. Springer Aerospace Technology. Springer; 1st ed. 2021. 719 p.
16. Henningsson T. Recursive state estimation for linear systems with mixed stochastic and set-bounded disturbances. *47th IEEE Conference on Decision and Control*. Cancun, Mexico, 2008. P. 678-683. DOI: <https://doi.org/10.1109/CDC.2008.4739139>.
17. Кичак В.М., Воловик А.Ю., Воловик Ю.М. Методи та пристрої обробки радіосигналів бортових авіаційних систем посадки: Монографія. Вінниця, ВНТУ, 2011. 208 с.
18. Первачов С. В., Валуев А. А., Чилікін В. М. Статистична динаміка радіотехнічних систем, що стежать. М: Рад. радіо, 1973. 488 с.
19. Stengel R. Flight Dynamics: Second Edition 2nd Edition. Princeton University Press; 2nd edition, 2022, 912 p.
20. Hsieh C.S., Chen F.C. Optimal solution of the two-stage Kalman estimator, *IEEE Transactions on Automatic Control*. Vol. 44, no. 1. P. 194-199, Jan. 1999. DOI: <https://doi.org/10.1109/9.739135>.
21. Lo K., Lu Q., Kwon W. Comments on "Optimal solution of the two-stage Kalman estimator". *IEEE Transactions on Automatic Control*. Vol. 47, no. 1. P. 198-199, Jan. 2002/ DOI: <https://doi.org/10.1109/9.981745>.

Надійшла (received) 27.02.2023

Прийнята до друку (accepted for publication) 19.04.2023

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ / ABOUT THE AUTHORS

Воловик Андрій Юрійович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри інформаційних радіоелектронних технологій і систем, Вінницький національний технічний університет, Вінниця, Україна;

Andrii Volovyk – PhD in Technical Sciences, associate professor, associate professor of Department of Information Radioelectronic Technologies and Systems, Vinnytsia National Technical University, Vinnytsia, Ukraine;

e-mail: voland@vntu.edu.ua; ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-8772-9843>.

Synthesis of quasi-optimal fast filters by the least square criterion

Andrii Volovyk

Abstract. The subject of the article research is special signal processing methods based on the optimal discrete filtering theory. The goal is to increase the efficiency of model-based methods for processing information signals by reducing computational costs and increasing the speed of optimal discrete filtering algorithms. Applied methods: description of dynamic processes in terms of state space using elements of vector-matrix algebra, weighted least squares method, elements of Kalman's theory of optimal discrete filtering, basic concepts of the O'Reilly–Luenberger theory of functional observers, elements of probability theory, statistical modeling by the Monte Carlo method. Results: a new method for reducing computational costs is proposed, which uses the approximation of the Kalman filter transfer matrix time dependence by given piecewise linear functions according to the least squares criterion. The effectiveness of the method was evaluated on the example of a second-order dynamical system. On the basis of a comparative analysis, several acceptable variants of the considered approximation are proposed. The practical significance of the work lies in the further development of methods for the synthesis of quasi-optimal high-speed filters. The operability of the proposed modifications is confirmed by the example of a second-order linear dynamic system. The efficiency of the algorithms was evaluated by the statistical modeling method according to the criterion "accuracy-computational costs". It is shown that the total savings in the number of multiplication and addition operations can reach tens of times due to insignificant losses in the accuracy of the filtering process.

Keywords: Kalman filter; matrix gain; approximation; least squares criterion.