

В. Ю. Дубницький<sup>1</sup>, А. М. Кобилін<sup>1</sup>, О. А. Кобилін<sup>2</sup>, Ю. І. Кушнерук<sup>3</sup>, О. І. Ходирев<sup>1</sup>

<sup>1</sup> ННІ “Каразінський банківський інститут” ХНУ імені В. Н. Каразіна, Харків, Україна

<sup>2</sup> Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, Україна

<sup>3</sup> Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків, Україна

## ОБЧИСЛЕННЯ ЗНАЧЕНЬ ФУНКЦІЇ ХАРРІНГТОНА (ФУНКЦІЇ БАЖАНОСТІ) ПРИ ІНТЕРВАЛЬНОМУ ВИЗНАЧЕННІ ЇЇ АРГУМЕНТІВ

**Анотація. Мета роботи.** Розробка пропозицій до методики обчислення функції бажаності за методом інтервальної арифметики. **Отримані результати.** Показано зв'язок між задачею багатокритеріальної (векторної оптимізації) і обчисленням значень функції Харрінгтона (функції бажаності). Показано, що функцію узагальненої бажаності можна розглядати як мультиплікативну згортку частинних бажаностей. Показано зв'язок між методами аналізу ієрархій і обчисленнями значень функції бажаності на основі використання властивостей золотого перетину. В цьому випадку розподіл можливих значень функції бажаності на інтервали, які визначено відповідно до правила золотого пропорції, співпадає з результатами, які отримані експертним методом. Використання золотого пропорції дозволяє збільшувати кількість інтервалів, що може бути корисним для підвищення чутливості методу Харрінгтона. **Висновки.** Для функції частинної бажаності в явному вигляді визначено такі геометричні характеристики як: рівняння дотичної, кривини кривої і координат центру кривини. Для управління процесом отримання системи з необхідною узагальненою бажаністю визначено в загальному та явному вигляді такі характеристики, як еластичність частинної бажаності, еластичність узагальненої бажаності по частинній бажаності, еластичність узагальненої бажаності по змінній що має фізичний зміст і відповідну вимірність, яка залежить від конкретної предметної області та впливає на величину частинної бажаності. Для визначення граничної величини заміщення однієї частинної бажаності іншою визначено функції граничної норми заміщення і функції еластичності граничної норми заміщення. **Пропозиції.** В зв'язку з похибками, що виникають при визначенні значень функції бажаності, запропоновано використовувати методи інтервального аналізу.

**Ключові слова:** функція Харрінгтона; інтервальный аналіз; золота пропорція; частинна бажаність.

### Вступ

Припустимо, що в  $n$ -вимірному евклідовому просторі  $R^n$  задано множину векторів  $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ . У цьому ж просторі задані цільові функції  $L_j(X)$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ , функції – обмеження  $G_k = \phi_k(X)$ ,  $k = 1, \dots, p$ , вигляду:

$$a_k \leq \phi_k(X) \leq b_k \quad \forall b_k \geq a_k \geq 0, \quad k = 1, \dots, p. \quad (1)$$

Якщо потрібно знайти такий вектор  $X^* \in R^n$ , для якого виконано співвідношення:

$$L(X^*) = \min_{X \in R^n} L(X) \quad (2)$$

або

$$L(X^*) = \max_{X \in R^n} L(X), \quad (3)$$

то співвідношення (1), (2) або (1), (3) при  $m = 1$  визначають класичну задачу оптимізації.

Якщо  $m > 1$ , то при виконанні співвідношення (1) отримаємо задачу багатокритеріальної або векторної оптимізації:

$$\left. \begin{array}{l} L_1(X) \rightarrow \text{extrem}_{X \in R^n} L_1(X) \\ \dots \\ L_j(X) \rightarrow \text{extrem}_{X \in R^n} L_j(X) \\ \dots \\ L_m(X) \rightarrow \text{extrem}_{X \in R^n} L_m(X) \end{array} \right\}, \quad (4)$$

у співвідношенні (4)  $\text{extrem}_{X \in R^n} L_j(X)$  означає, залежно

від умов задачі, найбільше або найменше значення  $L_j(X)$ . Різні варіанти постановки цієї задачі описано в [1]. Основні обчислювальні методи, які використовують для розв'язання задачі, сформульованої співвідношеннями (1) і (4), детально викладено в [2]. У цих роботах відмічено, що одним з найбільш поширених методів розв'язання задачі векторної оптимізації є метод згортки критеріїв. У цьому випадку вводять функцію вигляду  $S = \rho(L_1, \dots, L_m)$ , яку називають згортокою критеріїв  $L_j(X) = f_j(x_1, \dots, x_n)$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ . Таке перетворення дозволяє, при виконанні співвідношень (1), звести задачу багатокритеріальної оптимізації до її класичного варіанту:

$$S(X^*) = \text{extrem}_{X \in R^n} \rho(L_1(X), \dots, L_m(X)). \quad (5)$$

Алгебраїчні властивості функції згортки розглянуто в роботі [3]. Аналіз різних способів отримання згортки критеріїв описано в [1, 2, 4, 5, 9]. В рамках даної роботи буде розглянуто властивості способу згортки критеріїв, відомого як функція Харрінгтона або функція бажаності.

**Аналіз літератури.** В [6] було запропоновано варіант мультиплікативної згортки критеріїв, що отримав назву функції бажаності (відповідно до назви роботи) або функції Харрінгтона (відповідно до прізвища автора).

У [7, 8] детально викладена методика її застосування. Основні положення цієї методики наступні.

Припустимо, що міра відповідності характеристик технологічного процесу, характеристик фізичної або організаційної системи технічному завдан-

ню, або згідно з термінологією, яку наведено в роботі [6], її бажаність, може бути визначена за шкалою, наведеною в табл. 1.

Таблиця 1 – Базові оцінки за шкалою бажаності

Вербальні оцінки бажаності	Дуже погано	Погано	Задовільно	Добре	Дуже добре
Код інтервалу	H1	H2	H3	H4	H5
Кількісні оцінки за шкалою бажаності, $d$	0,00-0,20	0,20-0,37	0,37-0,63	0,63-0,80	0,80-1,00

Припустимо, що кожен об'єкт, бажаність якого потрібно оцінити по сукупності його властивостей  $X = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ , характеризується множиною оцінок їх частинних бажаностей  $Y = (d_1, d_2, \dots, d_i, \dots, d_n)$ . Припустимо, що задано відображення  $x_i \rightarrow d_i$ . Зміст цього відображення складається в тому, щоб перейти від деякої величини  $x_i$ , що має фізичний зміст і відповідну вимірність і яка залежить від конкретної предметної області, до безвимірної величини  $d_i$ . При цьому, якщо за фізичним змістом задачі  $x_i > x_j$ , то  $d_i > d_j$ . Відповідно до [6–8] оцінку узагальненої бажаності досліджуваного об'єкту визначають за співвідношенням:

$$D = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n d_i}. \quad (6)$$

З (6) витікає, що узагальнена бажаність – це мультиплікативна згортка частинних критеріїв у вигляді їх середнього геометричного. Вибір якнайкращого об'єкту  $D^*$  серед  $u$  досліджуваних об'єктів виконують, використовуючи співвідношення:

$$D^* = \max_D D_w \quad w = 1, 2, \dots, u. \quad (7)$$

Якщо є можливість кожну частинну оцінку бажаності  $d_i$  представити у вигляді:

$$d_i = \left( \prod_{t=1}^{g_i} d_{ti} \right)^{1/g_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (8)$$

то, згідно з (8), отримаємо:

$$D = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n \left( \prod_{t=1}^{g_i} d_{ti} \right)^{1/g_i}}. \quad (9)$$

Цей спосіб надає можливість будувати дерево оцінок бажаностей, що є особливо важливим при управлінні технологічними процесами незалежно від їх фізичної природи. В табл. 1 для визначення базових оцінок використано порядкову шкалу вимірювань ознак [10]. Таку ж порядкову шкалу, яку наведено в табл. 2, використано в методі аналізу ієрархій [11]. Формальне обґрунтування цього методу зроблене його автором, Т. Сааті, в роботі [12].

Таблиця 2 – Шкала відношень (СТУПЕНЯ значущості дій)

Ступінь значущості, $k$	Визначення	Пояснення
1	Однакова значущість	Рівний внесок двох елементів у загальну оцінку
3	Слабка значущість	Легка перевага одного елемента над іншим
5	Істотна значущість	Відчутна перевага одного елемента над іншим
7	Очевидна значущість	Практично значна перевага одного елемента над іншим
9	Абсолютна значущість	Очевидна перевага – домінування одного елемента над іншим

Порівнюючи табл. 1 і 2, слід зазначити, що в методі Харрінгтона вербальним межам інтервалів поставлено у відповідність їх чисельні межі, чого немає в методі Сааті. Із співвідношення (6) виходить, що шкала інтервалів, що наведена в табл. 1, має умовний характер тому, що остаточне рішення ухвалюють виходячи із співвідношення (7). В той же час розподіл одиничної шкали бажаності на інтервали дозволяє враховувати якісні характеристики системи, наприклад такі, як її ергономічність або естетичність [7]. Для визначення меж інтервалів в тому або іншому випадку, для переходу від результатів вимірювань конкретних фізичних характеристик до оцінок за шкалою бажаності в методі Харрінгтона або для визначення значущості чинників у методі аналізу ієрархій необхідна участь експертів.

Метод Сааті має чітко описану процедуру оцінки узгодженості думки експертів, чого немає в методі Харрінгтона. Метод Сааті, на відміну від методу Харрінгтона, може бути використаний при оцінці альтернатив, які визначені тільки за якісними ознаками.

У [7, 8] межам інтервалів функції бажаності дано таке пояснення. Їх вибір викликаний зручністю обчислень, оскільки:

$$d = 0,63 \approx 1 - 1/e = 0,63; \quad d = 0,37 \approx 1/e = 0,37.$$

Ніяких інших пояснень у цих роботах не наведено. Як впливає з табл. 1, величина бажаності  $d \in [0,1]$ , тому в [15, 16] було запропоновано обирати межі інтервалів цієї функції відповідно до правила золотого перетину. Алгебраїчні та геометричні

властивості золотого перетину детально розглянуто в [17, 18].

Розглянемо відрізок одиничної довжини АВ, який показано на рис. 1.



Рис. 1. Схема золотого перетину  
(Fig. 1 Scheme of the golden ratio)

Якщо точка С, що належить цьому відрізку та обрана таким чином, що при  $AC > CB$  виконано співвідношення:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1,61803 = \alpha, \quad (10)$$

то кажуть, що відношення довжин цих відрізків відповідає золотій пропорції. Довжини подальших відрізків отримуємо за співвідношенням:

$$l_{k+1} = l_k \frac{1}{\alpha} \quad k=0,1,2,\dots; \quad l_0 = 1; \quad (11)$$

у цьому випадку послідовність довжин відрізків буде спадною:  $l_{k+1} < l_k$  або

$$b_{k+1} = b_k + \frac{1 - b_k}{\alpha} \quad k=1,2,\dots; \quad b_1 = l_1. \quad (12)$$

У цьому випадку послідовність довжин відрізків буде зростаючою:  $b_{k+1} > b_k$ . Порівняння отриманих результатів з результатами, які отримані раніше, наведено в табл. 3.

Таблиця 3 – Порівняння інтервалів функції Харрінгтона (функції бажаності), що визначені експертним методом і методом золотого перетину

Метод визначення меж інтервалів			
Експертний метод	Метод золотого перетину		
[6–8]	[16]	[17]	Розробка авторів
0,00-0,20	0,000-0,146	0,00-0,14	0,00-0,14
	0,146-0,236		0,15-0,24
0,20-0,37	0,236-0,382	0,14-0,38	0,25-0,38
0,37-0,63	0,382-0,618	0,38-0,62	0,39-0,62
0,63-0,80	0,618-1,00	0,62-0,86	0,63-0,85
0,80-1		0,86-1	0,86-0,93
			0,94-1,00

З даних, які наведено в табл. 3, витікає, що розподіл допустимих значень функції бажаності на інтервали, які визначені відповідно до правила золоті пропорції, співпадає з результатами, які отримані експертним методом. Використання золоті пропорції дозволяє збільшувати кількість інтервалів, що може бути корисним для підвищення чутливості методу Харрінгтона.

Результати застосування методу Сааті і методу Харрінгтона істотно залежать від похибок обчислень, що виникають при їх використанні. Відповідно до [13] і [14] обчислимо граничну відносну похибку методу Харрінгтона. Прийmemo, що  $\varepsilon(D)$  – гранична відносна похибка обчислення за співвідно-

шенням (6) величини  $D$ ,  $\Delta(d_i)$  – гранична абсолютна похибка визначення величини  $d_i$ , а відносна –  $\varepsilon(d_i)$ . Тоді отримуємо:

$$\begin{aligned} \varepsilon(D) &= \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial}{\partial d_i} \ln D \right| \cdot |\Delta d_i| = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{n |d_i|} \cdot |\Delta d_i| = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\varepsilon(d_i)|. \end{aligned} \quad (13)$$

Обчислювальна сторона методу Сааті може бути викладена так. Для матриці спеціального вигляду, а саме оберненої симетричної матриці, визначають власний вектор, що відповідає найбільшому власному значенню матриці. Для іншої матриці такого ж виду виконують аналогічну операцію, а потім обчислюють скалярний добуток відповідних векторів.

Як зазначено в роботі [11], усі ці операції можна виконати з використанням сучасних пакетів комп'ютерної математики. Традиційно цю операцію виконують наближеним методом, в основу якого покладено метод скалярних добутків для визначення найбільшого власного значення дійсної матриці [13]. В [19] було запропоновано модель похибок, які виникають в методі аналізу ієрархій в процесі вибору найкращої альтернативи. В [20] показано, що малі відхилення в чисельних значеннях елементів матриць можуть істотно змінювати величини власних чисел матриць і векторів, що, у свою чергу, може служити підставою для помилкових висновків при ухваленні рішень. Одним із способів обчислення значень функції узагальненої бажаності  $D$  і частинних оцінок бажаностей  $d_i$  з урахуванням похибок їх визначення можуть бути інтервальні обчислення. У даній роботі використані методи інтервального аналізу, викладені в [21–24].

В класичній формі інтервальне число  $[A]$  визначають на множині дійсних чисел  $\mathcal{R}$  у вигляді замкнутого інтервалу. Згідно з цією роботою визначимо інтервальне число  $A$  таким чином:

$$[A] = (a_1, a_2), \quad a_1 \leq a_2. \quad (14)$$

Якщо  $a_1 = a_2$ , то таке інтервальне число називають виродженим. Приклад виродженого інтервального числа – стала величина. У роботі [23] описано спосіб представлення інтервальних чисел в системі ЦЕНТР-РАДІУС. У цій системі інтервальне число  $\langle A \rangle$  має такий вигляд:

$$\langle A \rangle = \langle a, r_a \rangle, \quad (15)$$

$$\text{де} \quad a = \frac{a_1 + a_2}{2}, \quad r_a = \frac{a_2 - a_1}{2}. \quad (16)$$

В роботі [24] запропоновано гіперболічну форму представлення інтервального числа. Згідно з цією роботою інтервальне число  $x$  можна подати так:

$$\{X\} = \rho(ch\phi + \theta \cdot sh\phi). \quad (17)$$

У співвідношенні (17) прийнято, що  $\theta$  – спеціальний символ. За умовчанням вважають, що

$\theta^2 = 1$ . Модулем гіперболічного інтервального числа називають величину:

$$\mu(x) = a^2 - r_a^2. \tag{18}$$

У даній роботі прийнято, що  $r_a < |a|$ . Величину  $\rho$  називають гіпермодулем, величину  $\phi$  – аргументом гіперболічного інтервального числа. Величини  $\rho$  і  $\phi$  визначають за співвідношеннями:

$$\rho = \sqrt{\mu(x)}, \phi = \frac{1}{2} \ln \frac{a+r_a}{a-r_a} = \frac{1}{2} \ln \frac{a_2}{a_1}. \tag{19}$$

Використовуючи співвідношення (16) і (18), отримаємо:

$$\mu(x) = \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_1-a_2}{2}\right)^2 = a_1 a_2. \tag{20}$$

Отже, інтервальне число  $x$  можна визначити як  $x = f(\rho, \phi)$ .

Розглянемо чисельний приклад: перейти від інтервального числа в класичній формі

$$[A] = (a_1, a_2) = (7, 11)$$

до його подання в гіперболічній формі. Використовуючи (17), (19) отримаємо:

$$\rho = \sqrt{7 \cdot 11} = 8,77496 \rightarrow \phi = \frac{1}{2} \ln \frac{11}{7} = 0,22599.$$

У гіперболічній формі це число прийме такий вигляд:

$$x = 8,77496 \cdot (ch(0,22599) + \theta \cdot sh(0,22599)).$$

Представимо отримане число  $[A]$  у формі числа, визначеного в системі ЦЕНТР-РАДІУС:

$$\langle A \rangle = \langle \rho \cdot ch\phi, \rho \cdot sh\phi \rangle = \langle 8,77496 \cdot ch(0,22599); 8,77496 \cdot sh(0,22599) \rangle = \langle 9, 2 \rangle.$$

Отже, одержимо початкове число  $[A] = (7, 11)$ .

Далі, для скорочення, будемо вживати термін «гіперболічне число», маючи на увазі під цим інтервальне число, визначене в гіперболічній формі. Зв'язки між різними формами подання інтервальних чисел наведено табл. 4.

Правила виконання основних арифметичних операцій з інтервальними числами, в залежності від форми їх подання, наведено в табл. 5.

Таблиця 4 – Зв'язки між різними формами подання інтервальних чисел

Форми подання інтервальних чисел	Форми подання інтервальних чисел		
	Класична, $[A] = (a_1, a_2)$	Система ЦЕНТР-РАДІУС, $\langle A \rangle = \langle a, r_a \rangle$	Гіперболічна, $x = f(\rho, \phi)$
Класична, $[A] = (a_1, a_2)$	$[A] = (a_1, a_2)$	$a = (a_2 + a_1)/2; r_a = (a_2 - a_1)/2$	$\rho = \sqrt{a_1 a_2}; \phi = \ln(a_2/a_1)/2$
Система ЦЕНТР-РАДІУС, $\langle A \rangle = \langle a, r_a \rangle$	$a_1 = a - r_a$ $a_2 = a + r_a$	$\langle A \rangle = \langle a, r_a \rangle$	$\rho = \sqrt{a^2 - r_a^2}; \phi = \frac{1}{2} \ln \frac{a+r_a}{a-r_a}$
Гіперболічна, $x = f(\rho, \phi)$	$a_1 = \rho(ch\phi - sh\phi)$ $a_2 = \rho(ch\phi + sh\phi)$	$\begin{cases} a = \rho \cdot ch\phi \\ r_a = \rho \cdot sh\phi \end{cases}$	$x = \rho(ch\phi + \theta \cdot sh\phi)$

Таблиця 5 – Правила виконання основних арифметичних операцій з інтервальними числами, які представлені в гіперболічній формі та в системі ЦЕНТР-РАДІУС

№	Вид операції	Система подання інтервальних чисел	
		Гіперболічна система	Система ЦЕНТР-РАДІУС
		Вид співвідношення, яке прийнято для даної операції	
1	$\oplus$	$(\rho \cdot ch\phi + \delta \cdot ch\psi) + \theta(\rho \cdot sh\phi + \delta \cdot sh\psi)$	$\langle x + y, r_x + r_y \rangle$
2	$x - y$	$(\rho \cdot ch\phi - \delta \cdot ch\psi) + \theta(\rho \cdot sh\phi - \delta \cdot sh\psi)$	$\langle x - y, r_x + r_y \rangle$
3	$x \cdot y$	$\rho\delta(ch(\phi + \psi) + \theta \cdot sh(\phi + \psi))$	$\langle xy + r_x r_y, x r_y + y r_x \rangle;$
4	$x/y$	$(\rho/\delta) \cdot (ch(\phi - \psi) + \theta \cdot (sh(\phi - \psi)))$	$\langle (xy + r_x r_y)/(y^2 - r_y^2), (x r_y + y r_x)/(y^2 - r_y^2) \rangle$
5	$1/x$	$(ch(-\phi) + \theta \cdot sh(-\phi))/\rho$	$\langle x/(x^2 - r_x^2), r_x/(x^2 - r_x^2) \rangle$
6	$x^n$	$\rho^n (ch(n\phi) + \theta \cdot sh(n\phi))$	$\langle x, r_x \rangle^n = \langle G, R \rangle, G = \sum_{k=0}^n C_n^{2k} r_x^{2k} x^{n-2k}, R = \sum_{k=0}^n C_n^{2k+1} r_x^{2k+1}  x ^{n-(2k+1)}$
7	$c \pm x$	$(c \pm \rho \cdot ch(\phi)) \pm \theta \cdot sh(\phi)$	$A + B = \langle c \pm x, r_x \rangle$
8	$cx$	$c\rho(ch\phi + \theta \cdot sh\phi)$	$\langle cx, c r_x \rangle;$
9	$x/c$	$(\rho/c) \cdot (ch\phi + \theta \cdot sh\phi)$	$\langle cx/c^2, c r_x/c^2 \rangle$
10	$c/x$	$(c/\rho) \cdot (ch\phi - \theta \cdot sh\phi)$	$\langle cx/(x^2 - r_x^2), c r_x/(x^2 - r_x^2) \rangle$

Детально спосіб обчислення цілого додатного ступеня інтервального числа, заданого в системі ЦЕНТР-РАДІУС, показано в табл. 6.

Таблиця 6 – Піднесення до цілого додатного степеня інтервального числа, заданого у системі ЦЕНТР-РАДІУС

№	Результат піднесення до цілого додатного степеня інтервального числа, заданого у системі ЦЕНТР-РАДІУС
1	$\langle A \rangle = \langle a, r_a \rangle$
2	$\langle A^2 \rangle = \langle a^2 + r_a^2, 2 a r_a \rangle$
3	$\langle A^3 \rangle = \langle a^3 + 3ar_a^2, 3a^2r_a + r_a^3 \rangle$
4	$\langle A^4 \rangle = \langle a^4 + 6a^2r_a^2 + r_a^4, 4 a ^3r_a + 4 a r_a^3 \rangle$
5	$\langle A^5 \rangle = \langle a^5 + 10a^3r_a^2 + 5ar_a^4, 5a^4r_a + 10a^2r_a^3 + r_a^5 \rangle$
6	$\langle A^6 \rangle = \left\langle \begin{matrix} a^6 + 15a^4r_a^2 + 15a^2r_a^4 + r_a^6, \\ 6 a ^5r_a + 20 a ^3r_a^3 + 6 a r_a^5 \end{matrix} \right\rangle$

Автори даного повідомлення в доступній для них літературі не знайшли інформації про застосування інтервальної арифметики для побудови функції бажаності.

**Постановка задачі.** Розробка пропозицій до методики обчислення функції бажаності методом інтервальної арифметики.

**Отримані результати**

Для подальшого викладу розглянемо допоміжні задачі. Припустимо, що інтервальне число визначено співвідношеннями (15) і (17). Зв'язок між параметрами цих способів визначення інтервального числа наведено в табл. 4 системою рівнянь:

$$\begin{cases} a = \rho \cdot ch\phi, \\ r_a = \rho \cdot sh\phi. \end{cases} \quad (21)$$

Розв'язок цієї системи наступний:

$$\phi = \text{Arcth} \frac{a}{r_a}; \quad \rho = \frac{a}{ch[\text{Arcth}(a/r_a)]}. \quad (22)$$

Для раніше наведеного чисельного прикладу отримаємо, що інтервальному числу  $\langle A \rangle = \langle a, r_a \rangle$ , визначеному в системі ЦЕНТР-РАДІУС з параметрами  $\langle A \rangle = \langle 9, 2 \rangle$ , відповідає гіперболічне число з параметрами:

$$\begin{aligned} \phi &= \text{Arcth}\langle 9/2 \rangle = 0,22599; \\ \rho &= \frac{9}{ch[\text{Arcth}(9/2)]} = 8,77496. \end{aligned}$$

Для визначення частинної оцінки бажаності  $d_i$  щодо  $i$ -ої характеристики системи в [6–8] запропоновано функцію:

$$d_i = \exp(-\exp(-x_i)). \quad (23)$$

Обчислення її значень зводиться до двократно-го обчислення експоненти з від'ємним показником:

$$\exp(-x_i) = u_i, \quad d_i = \exp(-u_i). \quad (24)$$

Графік цієї функції показано на рис. 2. Функція бажаності, представлена співвідношенням (24), має вигляд S-образної кривої, залежної від області допустимих значень аргументу. Геометричні властивості таких кривих, необхідні для опису функції бажаності, розглянуто в [26, 27]. Оскільки всі S-образні криві монотонні, то впорядкованість величин частинних бажаностей вони не змінюють. Тому їх конкретний вигляд не впливає на остаточний вибір найбільш переважного об'єкту. Детальніший аналіз цих властивостей S-образних кривих вимагає окремого дослідження.

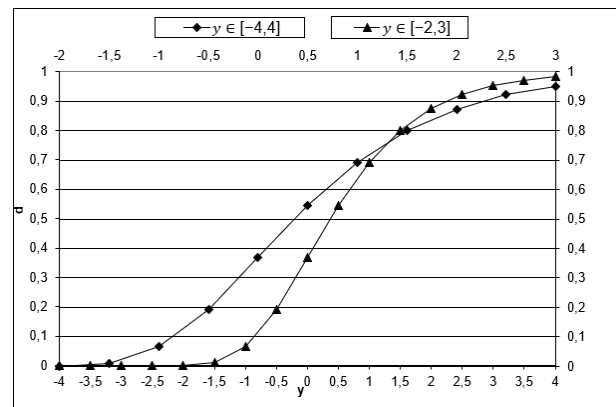


Рис. 2. Графіки функції частинної бажаності при різних областях допустимих значень аргументу (Fig. 2. Graphs of the partial desirability function for different regions of admissible values of the argument)

З графіків, які наведено на цьому рисунку, видно, що виділення області визначення функції частинної бажаності не менш важливо, ніж визначення конкретного виду відображення  $x_i \rightarrow d_i$  і вимагає залучення відомостей про фізичні властивості досліджуваних об'єктів.

Оскільки в даному повідомленні розглядаються функції, аргументи яких представлено інтервальними величинами, то необхідно перейти до їх інтервальних розширень.

Для цього розглянемо способи визначення наближених значень функцій, які будуть використані для виконання цих розширень.

У [22, 25, с. 64, п. г)] для експоненти з від'ємним показником запропоновано її раціональне наближення у вигляді:

$$e^{-x} = \left[ \sum_{k=0}^6 b_k x^k \right]^{-4} \quad \text{при } 0 \leq x \leq 16. \quad (25)$$

Значення коефіцієнтів  $b_k$ , які використано для наближення величини  $e^{-x}$ , наведено в табл. 7.

Співвідношення (25) дозволяє з достатньою точністю обчислювати чисельні значення величини  $e^{-x}$ . При  $x=1$  отримаємо 0,368113.

У [28] наведено значення цієї ж величини, яке дорівнює 0,367894.

Таблиця 7 – Значення інтерполяційних коефіцієнтів для обчислення величини  $e^{-x}$

$b_0$	1	$b_4$	0,0001715620
$b_1$	0,2499986842	$b_5$	0,0000054302
$b_2$	0,0312575832	$b_6$	0,0000006906
$b_3$	0,00259137121		

Представимо співвідношення (6) у вигляді:

$$D = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n d_i} = \sqrt[n]{W} \quad (26)$$

$$W = \prod_{i=1}^n d_i \quad (27)$$

Тоді  $D = 10^{(1/n)\lg W}$  (28)

Для обчислення значень величини  $D$  за співвідношенням (28) необхідно обчислити послідовно значення величин:

$$d_i \rightarrow \left( \prod_{i=1}^n d_i = W \right) \rightarrow (\lg W) \rightarrow \rightarrow \left( v = \frac{1}{n} \lg W \right) \rightarrow (D = 10^v) \quad (29)$$

Для обчислення величини  $\lg z$  використано інтерполяційне співвідношення, яке наведено в [28, з. 34, п. 41]:

$$\lg z = 0,86304t + 0,36415t^3, \quad t = \frac{z-1}{z+1}, \quad 0,3160 \leq z \leq 3,162. \quad (30)$$

Порівняння точності обчислень величини  $\lg z$  за співвідношенням (30) наведено в табл. 8.

Таблиця 8 – Модуль відносної похибки обчислення функції  $\lg(z)$

Значення аргументу $z$	Значення функції $\lg(z)$	Значення величини $\lg(z)$ згідно з (27)	Модуль відносної похибки $ \varepsilon $
0,1	-1	-0,90576	10,40%
0,2	-0,69897	-0,68336	2,28%
0,3	-0,52288	-0,52162	0,24%
0,4	-0,39794	-0,39856	0,16%
0,5	-0,30103	-0,30118	0,05%
0,6	-0,22185	-0,22145	0,18%
0,7	-0,1549	-0,1543	0,39%
0,8	-0,09691	-0,09639	0,54%
0,9	-0,04576	-0,04547	0,63%

Для обчислення величини  $10^v$  у [25, з. 55, п. 3а] запропоновано співвідношення [28]:

$$10^v \approx \left[ \sum_{k=1}^4 c_k x^k \right]^2, \quad (0 \leq v \leq 1). \quad (31)$$

Значення коефіцієнтів  $c_k$  наведено в табл. 9. Порівняння точності виконаних обчислень величини  $10^v$  наведено в табл. 10.

Таблиця 9 – Значення інтерполяційних коефіцієнтів для обчислення величини  $10^v$

$c_0$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$c_4$
1	1,149919	0,677432	0,208003	0,126808

Таблиця 10 – Порівняння точності обчислень величини  $10^v$

Значення аргументу $v$	Значення функції $10^v$	Значення величини $10^v$ згідно з (28)
0,1	1,2586	1,2586
0,2	1,5845	1,5845
0,3	1,9948	1,9948
0,4	2,5118	2,5118
0,5	3,1623	3,1608
0,6	3,9811	3,9703
0,7	5,0118	5,0093
0,8	6,3095	6,3086
0,9	7,9433	7,9401

Таким чином, наведені методи обчислень можуть бути використані при обчисленні інтервальних розширень співвідношень (23) і (25). При виконанні цих дій виникає необхідність обчислення величини  $s$  – скінченної суми степеневого ряду, всі доданки якого мають ступінь не вище  $q$ :

$$s(x) = \sum_{w=1}^q c_w x^w = \sum_{w=1}^q c_w [\rho(x)(ch(\phi(x)) + \theta \cdot sh(\phi(x)))]^w = \sum_{w=1}^q c_w [\rho^w(x)(ch(w\phi(x)) + \theta \cdot sh(w\phi(x)))] \quad (32)$$

У (32) прийнято, що  $c_w$  – постійна величина. Розкриваючи дужки в (32), отримаємо, що:

$$s(x) = \sum_{w=1}^q c_w \rho^w(x) ch(w\phi(x)) + \theta \sum_{w=1}^q c_w \rho^w(x) sh(w\phi(x)). \quad (33)$$

Переходячи в (32) від суми, представленої у вигляді гіперболічного числа, до суми, представленої у вигляді числа, визначеного в системі ЦЕНТР-РАДІУС, отримаємо:

$$\langle s(x) \rangle = \left\langle \begin{matrix} \sum_{w=1}^q c_w \rho^w(x) ch(w\phi(x)), \\ \sum_{w=1}^q c_w \rho^w(x) sh(w\phi(x)) \end{matrix} \right\rangle. \quad (34)$$

Використовуючи (34), отримаємо систему (21) у вигляді:

$$\begin{cases} \sum_{w=1}^q c_w \rho^w(x) ch(w\phi(x)) = \rho_g(x) ch\hat{\phi}_g(x), \\ \sum_{w=1}^q c_w \rho^w(x) sh(w\phi(x)) = \rho_g sh\hat{\phi}_g(x). \end{cases} \quad (35)$$

Якщо всі обчислення виконують тільки щодо однієї змінної, то символ  $(x)$  можна не указувати. Корені системи (35), які дорівнюють величинам  $\hat{\rho}_g$  і  $\hat{\phi}_g$  та отримані із співвідношення (22), дозволяють представити скінченну суму (32) у вигляді гіперболічного числа:

$$s_g^q(x) = \hat{\rho}_g^{(q)}(ch\hat{\phi}_g^{(q)}(x) + \theta \cdot sh\hat{\phi}_g^{(q)}(x)). \quad (36)$$

Для обчислення в гіперболічному вигляді співвідношення (25) із використанням при цьому співвідношення, яке наведено в табл. 5, п. 5, і співвідношення (32)...(36) відносно змінних  $y_i, i = 1, 2, \dots, n$ , отримаємо:

$$\begin{aligned} \exp(-x_i) &= \left(\hat{\rho}_g^{(6)}\right)^{-4} \times \\ &\times \left( ch\left(-4\hat{\phi}_g^{(6)}\right)(x_i) + \theta \cdot sh\left(-4\hat{\phi}_g^{(6)}\right)(x_i) \right). \end{aligned} \quad (37)$$

Відповідно до (24), двічі застосовуючи (37), отримаємо співвідношення (23), тобто оцінку частинної бажаності  $d_i$ , представлену в гіперболічному вигляді:

$$d_i = \rho(d_i) \cdot [ch(\phi(x_i)) + \theta \cdot sh(\phi(x_i))]. \quad (38)$$

Далі розглянемо послідовність дій (29) в розширеному вигляді:

$$\begin{aligned} \left( \prod_{i=1}^n d_i = w \right) &\rightarrow \left( t = \frac{w-1}{w+1} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left( \lg w = 0,86304t + 0,364t^3 \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left( v = \frac{1}{n} \lg w \right) \rightarrow \left( D \approx \left[ \sum_{c=1}^4 c_k x^v \right]^2 \right). \end{aligned} \quad (39)$$

Інтервальне розширення величини  $w$  отримаємо відповідно до табл. 5, п. 3:

$$w = \prod_{i=1}^n d_i = \prod_{i=1}^n \rho(x_i) \cdot \left[ \begin{matrix} ch\left(\sum_{i=1}^n \phi(x_i)\right) + \\ + \theta \cdot sh\left(\sum_{i=1}^n \phi(x_i)\right) \end{matrix} \right]. \quad (40)$$

Для обчислення величини  $t$  представимо величину  $w$  в системі ЦЕНТР-РАДІУС:

$$\langle W \rangle = \langle w, r_w \rangle = \left\langle \begin{matrix} \prod_{i=1}^n \rho(x_i) \cdot ch\left(\sum_{i=1}^n \phi(x_i)\right), \\ \prod_{i=1}^n \rho(x_i) \cdot sh\left(\sum_{i=1}^n \phi(x_i)\right) \end{matrix} \right\rangle. \quad (41)$$

Згідно з табл. 5, п. 7 отримаємо:

$$\langle W-1 \rangle = \left\langle \begin{matrix} \left[ \prod_{i=1}^n \rho(x_i) \cdot ch\left(\sum_{i=1}^n \phi(x_i)\right) - 1 \right], \\ \left[ \prod_{i=1}^n \rho(x_i) \cdot sh\left(\sum_{i=1}^n \phi(x_i)\right) \right] \end{matrix} \right\rangle; \quad (42)$$

$$\langle W+1 \rangle = \left\langle \begin{matrix} \left[ \prod_{i=1}^n \rho(x_i) \cdot ch\left(\sum_{i=1}^n \phi(x_i)\right) + 1 \right], \\ \left[ \prod_{i=1}^n \rho(x_i) \cdot sh\left(\sum_{i=1}^n \phi(x_i)\right) \right] \end{matrix} \right\rangle. \quad (43)$$

Прийемо, що:

$$\begin{aligned} \alpha &= \left[ \prod_{i=1}^n \rho(x_i) \cdot ch\left(\sum_{i=1}^n \phi(x_i)\right) - 1 \right]; \\ r_\alpha &= \left[ \prod_{i=1}^n \rho(x_i) \cdot sh\left(\sum_{i=1}^n \phi(x_i)\right) \right]; \end{aligned} \quad (44)$$

$$\beta = \left[ \prod_{i=1}^n \rho(x_i) \cdot ch\left(\sum_{i=1}^n \phi(x_i)\right) + 1 \right]. \quad (45)$$

Відповідно до табл. 5, п. 4 отримаємо:

$$\langle T \rangle = \left\langle \frac{\alpha\beta + r_\alpha^2}{\beta^2 - r_\alpha^2}, \frac{r_\alpha(\alpha + \beta)}{\beta^2 - r_\alpha^2} \right\rangle = \langle t, r_t \rangle. \quad (46)$$

Прийемо, що  $\gamma = 0,86304$  і  $\lambda = 0,3641$ , тоді, використовуючи співвідношення (30), (46), табл. 5, пп. 8, 9 і табл. 6, пп. 1, 3, отримаємо:

$$\begin{aligned} \langle W \rangle &= \langle \gamma T \rangle + \langle \lambda T^3 \rangle = \\ &= \left\langle \frac{1}{n^2} \left[ \gamma \cdot t + \lambda(t^3 + 3tr_t^2) \right], \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{n^2} \left[ \gamma \cdot r_t + \lambda(3t^2 r_t + r_t^3) \right] \right\rangle. \end{aligned} \quad (47)$$

Використовуючи співвідношення (21) і (47) отримаємо систему:

$$\begin{cases} \frac{1}{n^2} \left[ \gamma \cdot t + \lambda(t^3 + 3tr_t^2) \right] = \rho_w ch(\phi_f), \\ \frac{1}{n^2} \left[ \gamma \cdot r_t + \lambda(3t^2 r_t + r_t^3) \right] = \rho_w sh(\phi_f). \end{cases} \quad (48)$$

Корені цієї системи  $\hat{\rho}_f$  і  $\hat{\phi}_f$  слід використовувати для обчислення інтервального розширення

величини узагальноної оцінки бажаності  $\{D\}$  в послідовності, яка визначена співвідношеннями (32)–(35):

$$\{D\} = \prod_{i=1}^n \exp(-\exp(-x_i)) \approx \left[ \sum_{k=1}^4 c_k \hat{\rho}_f^k ch(k\hat{\phi}_f) + \theta \sum_{k=1}^4 c_k \hat{\rho}_f^k sh(k\hat{\phi}_f) \right]. \quad (49)$$

В [26] були розглянуті геометричні характеристики деяких видів  $S$ -образних кривих, такі, як: дотична в точці  $(x_0, d_0)$ , кривина кривої в довільній точці  $M(x, d)$  та координати  $\xi, \eta$  центру  $C$  кривизни. Ці характеристики наведені в табл. 11.

Таблиця 11 – Геометричні характеристики функції частинної бажаності

Найменування характеристики	Загальний вид співвідношення	Явний вид співвідношення
Дотична в т. $(x_0, d_0)$	$d - d_0 = d'_x(x - x_0)$	$d - d_0 = d'_x(x - x_0)$
Кривина кривої в довільній точці $M(x, d)$	$K =  d''_x  / (1 + (d'_x)^2)^{3/2}$	$K = e^{2e^{-x}+x} \cdot (e^x - 1) \cdot \text{sign}(x) / \left\{ e^{2(e^{-x}+x)} + 1 \right\}^{3/2}$
Координати $\xi, \eta$ центру $C$ кривизни	$\xi = x - \frac{d'_x(1+(d'_x)^2)}{d''_x}; \eta = d + \frac{(1+(d'_x)^2)}{d''_x}; d''_x \neq 0.$	$\xi = x - A^2 \frac{e^x}{1-e^x}; \eta = \frac{d}{1-e^x} [A^2 \exp(2(e^{-x}+x)) - e^x + 1].$
Допоміжні функції: $d = \exp(-\exp(-x)); d'_x = \exp[-(e^{-x})]; d''_x = d \cdot [\exp(-2x) - \exp(-x)]; A = 1 + d'_x$		

Таблиця 12 – Визначення функцій еластичності (відносній чутливості)

Найменування характеристики	Загальний вид співвідношення	Явний вид співвідношення
Еластичність частинної бажаності, $E_{di}$	$d'_{xi} \cdot (x_i/d_i)$	$x_i \exp(-x_i)$
Еластичність узагальноної бажаності по частинній бажаності, $E_{di}(D)$ ,	$\frac{\partial D}{\partial(d_i)} \frac{d_i}{D}$	$\frac{1}{n}$
Еластичність узагальноної бажаності по змінній $x_i$ , $E_{xi}(D_x)$	$\frac{\partial D_x}{\partial(x_i)} \frac{x_i}{D_x}$	$\frac{x_i \exp(-x_i)}{n}$

Для визначення граничної величини заміщення частинної бажаності  $d_i$  бажаністю  $d_j$  або граничної величини заміщення величини  $x_i$  величиною  $x_j$  використовують функції граничної норми заміщення і функції еластичності граничної норми заміщення. До-

Приймаючи до уваги (23) і (26), узагальнену бажаність представимо у вигляді співвідношення:

$$D_x = \left[ \prod_{i=1}^n \exp(-e^{-x_i}) \right]^{1/n}. \quad (50)$$

Для управління процесом отримання системи з необхідною узагальноною бажаністю (6) з'являється потреба б забезпечити її задане значення. Для визначення необхідної величини частинної бажаності в цьому випадку можна використовувати функції еластичності (відносній чутливості), які наведено в табл. 12.

кладні відомості про властивості цих функцій і способи їх застосування при проектуванні технічних систем приведені в [29] і [30].

Співвідношення, які необхідні для отримання цих функцій, приведені в табл. 13.

Таблиця 13 – Визначення функцій граничної норми заміщення і еластичності граничної норми заміщення

Найменування характеристики	Загальний вид співвідношення	Явний вид співвідношення
Гранична норма заміщення, $S_{ij}(D)$	$\frac{\partial D}{\partial d_i} / \frac{\partial D}{\partial d_j}$	$\frac{d_j}{d_i}, i, j = 1, \dots, n$
Гранична норма заміщення, $S_{ij}(D_x)$	$\frac{\partial D_x}{\partial x_i} / \frac{\partial D_x}{\partial x_j}$	$\exp(x_j - x_i), i, j = 1, \dots, n.$
Гранична еластичність заміщення, $\sigma_{ij}(D)$	$\sigma_{ij}(D) = \frac{\partial(D)}{\partial d_i} \cdot \frac{\partial(D)}{\partial d_j} / D \cdot \frac{\partial^2(D)}{\partial(d_i) \cdot \partial(d_j)}$	$1, i, j = 1, \dots, n.$
Гранична еластичність заміщення, $\sigma_{ij}(D_x)$	$\frac{\partial(D_x)}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial(D_x)}{\partial x_j} / D_x \cdot \frac{\partial^2(D_x)}{\partial(x_i) \cdot \partial(x_j)}$	$\frac{e^{2x_j} (x_j e^{x_i} + x_i e^{x_j})}{x_i x_j [e^{2x_i} (e^{x_j} - 1) + e^{3x_j} + e^{2x_j}]}; i, j = 1, \dots, n.$



Запропонована в даній роботі методика обчислення значень функції Харрінгтона (функції бажаності) при інтервальному визначенні аргументів може бути використана при розробці варіантів технічного завдання і попереднього проектування складних технічних і організаційних систем.

### Висновки

1. Показано зв'язок між задачею багатокритеріальної (векторній оптимізації) і обчисленням значень функції Харрінгтона (функції бажаності).

2. Показано, що функцію узагальненої бажаності можна розглядати як мультиплікативну згортку частинних бажаностей.

3. Показано, використовуючи властивості золотого перетину, зв'язок між методами аналізу ієрархій і обчисленням значень функцій бажаності. В цьому випадку розподіл можливих значень функції бажаності на інтервали, які визначено відповідно до правила золотого пропорції, співпадає з результатами, які отримані експертним методом. Використання золотого пропорції дозволяє збільшувати кількість інтервалів, що може бути корисним для підвищення чутливості методу Харрінгтона.

4. Для функції частинної бажаності в явному вигляді визначено такі геометричні характеристики як: рівняння дотичної, кривини кривої і координат центру кривини.

5. Для управління процесом отримання системи з необхідною узагальненою бажаністю визначено в загальному та явному вигляді такі характеристики, як еластичність частинної бажаності, еластичність узагальненої бажаності по частинній бажаності, еластичність узагальненої бажаності по змінній, що має фізичний зміст, і відповідну вимірність, яка залежить від конкретної предметної області та впливає на величину частинної бажаності.

6. Для визначення граничної величини заміщення однієї частинної бажаності іншою визначено функції граничної норми заміщення і функції еластичності граничної норми заміщення.

7. В зв'язку з похибками, що виникають при визначенні значень функції бажаності, запропоновано використовувати методи інтервального аналізу.

8. Показано застосування інтервальних чисел, представлених в гіперболічній формі, для обчислення частинної і узагальненої бажаності.

9. Визначена часткова сума степеневого ряду відносно змінною, яка представлена в гіперболічній формі.

10. Показано, що запропонована в даній роботі методика обчислення значень функції Харрінгтона (функції бажаності) при інтервальному визначенні аргументів може бути використана при розробці варіантів технічного завдання і попереднього проектування складних технічних і організаційних систем.

### REFERENCES

- Zaburanna, L. V. (2014), *Optimization methods and models*, Agrar Media Group, Kyiv, 373 p.
- Shtojer, R. (1992), *Multicriteria optimization. Theory, calculations and applications*, Radio i svjaz', Moscow, 504 p.
- Melamed, I. I. (1997), "Linear convolution of criteria in multicriteria optimization", *Avtomatika i telemekhanika*, Issue I, pp. 119-125.
- Kovalenko, Y. Y. and Pavlenko, A. Ju. (2017), "Reducing the number of criteria in multi-criteria decision-making problems by pairwise comparison", *Computer technologies: Science*, Mykolaiv, Issue 295, vol. 307, pp. 47-53.
- Chernetska, Yu. A. (2012), "Methods of multi-criteria optimization of the capital structure of the enterprise", *Scientific Bulletin. Odesa National University of Economics. All-Ukrainian Association of Young Scientists. – Sciences: economics, political science, history*, No. 10 (162), pp. 100-110.
- Harrington, E. C. (1965), "The desirable function", *Industrial Quality Control*, Vol. 21, No. 10, pp. 494-498.
- Adler, Yu. P., Markova, E. V. and Granovsky, Yu. V. (1976), *Planning of experiment in search of optimal conditions*, NAUKA, Moscow, 279 p.
- Akhazarova, S. L. and Gordeev, L. S. (2003), *Using the Harrington desirability function in solving optimization problems of chemical technology: Educational and methodological manual*, RCTU, Moscow, 76 p.
- Malyarets, L., Martynova, O. and Chudaieva, L. (2018), "Multi-criteria optimization of the balanced scorecard for the enterprise's activity evaluation: management tool for business-innovations", *Marketing and Management of Innovations*, No. 3, pp. 48-58.
- Zahozhai, B.V. (2006), *Statistics: basic outline of lectures*, MAUP, Kyiv, 160 p.
- Honcharov, I. V. (2003), *Risk and managerial decision-making: Study guide*, NTU KhPI, 150 p.
- Saaty, Thomas L. (2008), "Relative Measurement and its Generalization in Decision Making: Why Pairwise Comparisons are Central in Mathematics for the Measurement of Intangible Factors The Analytic Hierarchy/Network Process", *Review of the Royal Academy of Exact, Physical and Natural*, Vol. 102 (2), pp. 251-318.
- Demidovich, B. P. and Maron, I. A. (1966), *Fundamentals of Computational Mathematics*, Nauka, Moscow, 658 p.
- Novitsky, P. V. and Zograf, I. A. (1991), *Estimation of Measurement Errors*, Energotomizdat, Leningrad, 302 p.
- Kuz, M. V. and Andreiko, V. M. (2016), "Qualimetric scales of software products", *Methods for adjusting the quality control*, No. 1 (36), pp. 54-62.
- Muzychenko, M. V. (2017), "Verhulst's Logistics Function as a Baggage Function for Normalization of Indicators for the Safety of Natural Gas Supply", *Economics and Suspilstvo*, No 9, pp. 83-88.
- Stakhov, A. P. (1978), *Codes of the golden ratio*, Radio i svyaz, Moscow, 144 p.
- Vorobyov, N. N. (1978), *Chisla Fibonachch*, NAUKA, Moscow, 144 p.
- Dubnytskyi, V. Yu. and Samorodov, V. B. (2009), "The model of pardon vindication in the process of choosing the best alternative in the method of analysis of hierarchy", *Biznes-inform*, No. 2(2), pp. 171-174.
- Petrov, Yu. P. (2012), *Ensuring the reliability and reliability of computer calculations*, BHV-Peterburg, St. P., 160 p.

21. Dubnitsky, V., Kobilin, A., Kobilin, O. and Kushneruk, Yu. (2021), "EXCEL-oriented procedure for calculating the values of special functions with an interval argument, set in hyperbolic form", *Advanced information systems*, Vol. 5, No.4, pp. 116-123. DOI: <https://doi.org/10.20998/2522-9052.2021.4.16>.
22. Dubnitsky, V. Yu., Kobylin, A. M. and Kobylin, O. A. (2017), "Calculation of the values of elementary and special functions with an interval specified argument defined in the CENTER-RADIUS system", *Applied radio electronics*, Vol. 16, No. 3-4, pp. 147-154.
23. Zhukovska, O. A. (2009), "*Fundamentals of interval analysis: a study guide*", Education of Ukraine, Kyiv, Ukraine, 136 p.
24. Molodtsov, D. A. and Kovkov, D. V. (2011), "Introduction to the theory of approximate numbers", *Bulletin of the Tver State University. Series: Applied Mathematics*, 23, pp. 111-128.
25. Ljusternik, L. A., Chervonenkis, O. A. and Janpolskij, A. R. (1963), "*Mathematical Analysis: Calculation of Elementary Function*", НАУКА, Moscow, 248 p.
26. Gadecka, S. V., Dubnitsky, V. Yu., Kushneruk, Yu. I., Filatova, L. D. and Khodirev, O. I. (2021), "Geometrical characteristics of S-like (logistic) curves, which are to be observed when modeling the phenomenon of hysteresis", *Advanced information systems*, No. 2(165), pp. 14-27, doi: <https://doi.org/10.30748/soi.2021.165.02>.
27. Beskorovayny, V. V., and Soboleva, E. V. (2010), "Identification of private utility of multifactorial alternatives using S-shaped utility functions", *Bionics of intelligen*, No. 1 (72), pp. 50-54.
28. Abramowitz, M. and Stigan, I. (1979), *Handbook of Special Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables*, Nauka, Moscow, 832 p.
29. Bessonov L. A. (1996), *Theoretical foundations of electrical engineering*, Vysshaya shkola, Moscow, 638 p.
30. Hachevich, G. A., Pronevich, A. F., and Chajkovskij, M. V. (2018) "Economic-mathematical analysis of production functions with constant production elasticity", *Business. Innovation. Economy*, Issue 2, pp. 171-180.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Забуранна Л. В. Оптимізаційні методи та моделі. Київ, 2014. 373 с.
2. Штойер Р. Многокритериальная оптимизация. Теория, вычисления и приложения. М.: Радио и связь, 1992. 504 с.
3. Меламед И. И. Линейная свёртка критериев в многокритериальной оптимизации. *Автоматика и телемеханика*, 1997. Вып. 9. С. 119-125.
4. Коваленко, И. И., Павленко А. Ю. Снижение числа критериев в многокритериальных задачах принятия решений методом попарного сравнения. *Комп'ютерні технології*. 2017. Миколаїв. Т. 307, вип. 295. С. 47-53.
5. Чернецька Ю. А. Методи багатокритеріальної оптимізації структури капіталу підприємства. *Науковий вісник. Одеський національний економічний університет. Науки: економіка, політологія, історія*. 2012. № 10 (162). С. 100-110.
6. Harrington, E. The desirable function. *Industrial Quality Control*. 1965. Vol. 21, No. 10. P. 494-498.
7. Адлер Ю. П., Маркова Е. В., Грановский Ю. В. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий. М.: «НАУКА», 1976. 279 с.
8. Ахназарова С. Л., Гордеев Л. С. Использование функции желательности Харрингтона при решении оптимизационных задач химической технологии. Москва, РХТУ, 2003. 76 с.
9. Mal'yarets L., Martynova O., Chudaieva L. Multi-criteria optimization of the balanced scorecard for the enterprise's activity evaluation: management tool for business-innovations. *Marketing and Management of Innovations*, 2018. No. 3. P. 48-58.
10. Статистика: опорний конспект лекцій / Б. В. Захожай та ін. Київ: МАУП. 2006. 160 с.
11. Гончаров І. В. Ризик та прийняття управлінських рішень. Харків: НТУ ХПІ. 2003. 150 с.
12. Saaty, Thomas L. (2008), [Relative Measurement and its Generalization in Decision Making: Why Pairwise Comparisons are Central in Mathematics for the Measurement of Intangible Factors The Analytic Hierarchy/Network Process. *Review of the Royal Academy of Exact, Physical and Natural*. 2008. Vol. 102 (2). P. 251-318.
13. Демидович Б. П., Марон И. А. Основы вычислительной математики. Москва. «Наука». 1966. 658 с.
14. Новицкий П. В., Зограф И. А. Оценка погрешностей результатов измерений. Л-д: Энерготомиздат. 1991. 302 с.
15. Кузь М. В., Андрейко В. М. Кваліметричні шкали програмних продуктів. *Методи та прилади контролю якості*. 2016. №1(36). С. 54-62.
16. Музиченко М. В. Використання логістичної функції Ферхюльста як функції бажаності для нормування показників безпеки постачання природного газу. *Економіка і суспільство*. 2017. Вип. 9. С. 83-88.
17. Стахов А. П. Коды золотой пропорции. Москва: Радио и связь, 1978. 144 с.
18. Воробьев Н. Н. Числа Фибоначчи. Москва: НАУКА, 1978. 144 с.
19. Дубницький В. Ю., Самородов В. Б. Модель виникнення помилок в процесі вибору найкращої альтернативи в методі аналізу ієрархій. *Бізнес-інформ*, 2009. № 2(2). С.171-174.
20. Петров Ю. П. Обеспечение достоверности и надёжности компьютерных расчётов. СПб.: БХВ-Петербург, 2012. 160 с.
21. Дубницький, В., Кобилін, А., Кобилін, О. і Кушнерук, Ю. 2021. EXCEL-орієнтована процедура для обчислення значень спеціальних функцій з інтервальним аргументом, заданим в гіперболічній формі. *Сучасні інформаційні системи*. Т.5, №4 (Груд 2021), 116-123. DOI: <https://doi.org/10.20998/2522-9052.2021.4.16>.
22. Дубницький В. Ю., Кобылин А. М., Кобылин О. А. Вычисление значений элементарных и специальных функций с интервально заданным аргументом, определённым в системе ЦЕНТР-РАДИУС. *Прикладная радиоэлектроника*. 2017. №3, 4. Том 16. С. 147-154.
23. Жуковська, О. А. Основи інтервального аналізу: навчальний посібник. Київ.: Освіта України, 2009. 136 с.
24. Молодцов, Д. А. и Ковков, Д. В. (2011) *Введение в теорию приближенных чисел*. Вестник Тверского Государственного Университета. Серия: Прикладная математика. 2011. 23. С. 111-128.
25. Люстерник, Л. А., Червоненкис О. А., Ямпольский А. Р. Математический анализ: Вычисление элементарных функций. Москва: НАУКА, 1963. 248 с.

26. Гадецька С. В., Дубницький В. Ю., Кушнерук Ю. І., Філатова Л. Д., Ходирев О. І. Геометричні характеристики S-подібних (логістичних) кривих, що застосовуються при моделюванні явища гістерезису. *Системи обробки інформації*. 2021. № 2(165). С. 14-27. DOI: <https://doi.org/10.30748/soi.2021.165.02>.
27. Бескоровайный В. В., Соболева Е. В. Идентификация частной полезности многофакторных альтернатив с помощью S-образных функций полезности. *Бионика интеллекта*. 2010. №1 (72). С. 50-54.
28. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами / Под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. Москва: Наука, 1979. 832 с.
29. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Москва: Высшая школа, 1996. 638 с.
30. Хацкевич Г. А., Проневич А. Ф., Чайковский М. В. Экономико-математический анализ производственных функций с постоянной эластичностью производства. *Бизнес. Инновации. Экономика*. 2018. Вып. 2. С. 171-180.

Received (Надійшла) 03.11.2022

Accepted for publication (Прийнята до друку) 18.01.2023

#### ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ / ABOUT THE AUTHORS

**Дубницький Валерій Юрійович** – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, старший науковий співробітник Харківського навчально-наукового інституту “Каразінський банківський інститут” Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна, Харків, Україна;

**Valeriy Dubnitskiy** – PhD in Engineering Senior Researcher Senior Researcher of “Karazin Banking Institute” of V.N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine;  
e-mail: [dubnitskiy@gmail.com](mailto:dubnitskiy@gmail.com); ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-1924-4104>.

**Кобилін Анатолій Михайлович** – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри інформаційних технологій та математичного моделювання, ННІ “Каразінський банківський інститут” ХНУ ім. В. Н. Каразіна, Харків, Україна;

**Anatoliy Kobylin** – Candidate of Technical Sciences, Associate professor, Associate professor of “Karazin Banking Institute” of V.N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine;  
e-mail: [anatoliy\\_kam@ukr.net](mailto:anatoliy_kam@ukr.net); ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0002-8083-0762>.

**Кобилін Олег Анатолійович** – кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри інформатики, Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, Україна;

**Oleg Kobylin** – Candidate of Technical Sciences, Associate professor, Head of the Department of Informatics, Kharkiv National University of Radio Electronics, Kharkiv, Ukraine;  
e-mail: [oleg.kobylin@gmail.com](mailto:oleg.kobylin@gmail.com); ORCID ID: <http://orcid.org/0000-0003-0834-0475>.

**Кушнерук Юрій Іонович** – кандидат технічних наук, доцент, доцент Інституту цивільної авіації Харківського національного університету Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків, Україна;

**Yuri Kushneruk** – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate professor of Civil Aviation Institute of Ivan Kozhedub Kharkiv National Air Force University, Kharkiv, Ukraine;  
e-mail: [kyshneryk\\_ui@ukr.net](mailto:kyshneryk_ui@ukr.net); ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-5844-7137>.

**Ходирев Олександр Іванович** – старший викладач Харківського навчально-наукового інституту “Каразінський банківський інститут” Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна, Харків, Україна;

**Alexander Khodyrev** – Senior Lecturer of “Karazin Banking Institute” of V.N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine;  
e-mail: [khodyrevmjk3758@gmail.com](mailto:khodyrevmjk3758@gmail.com); ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-9871-9440>.

#### Calculation of harrington function (desirability function) values under interval determination of its arguments

Valeriy Dubnitskiy, Anatoliy Kobylin, Oleg Kobylin, Yuri Kushneruk, Alexander Khodyrev

**Abstract. Purpose of work.** Development of proposals for desirability function calculation by interval arithmetic method. **Obtained results.** A connection was shown between multiple-criterial (vector) optimization problem and calculation of Harrington function (desirability function) values. Generalized desirability function was shown to be treated as a multiplicative convolution of partial desirabilities. Using golden section properties, a connection was discerned between hierarchy analysis methods and calculation of desirability function values. In this case the distribution of probable desirability function values among intervals determined in accordance with golden mean rule does coincide with values obtained by expert method. Application of golden proportion enables increasing the number of intervals; thus, it may prove convenient in improvement of Harrington function sensitivity. **Conclusions.** For partial desirability function in its explicit form such geometric characteristics were determined as values of tangent, curvature of curve and center of curvature coordinates. For a necessary averaged desirability system obtaining process control, such characteristics were determined in general and explicit form as partial desirability elasticity, generalized desirability elasticity relative to partial desirability, generalized desirability elasticity relative to a variable that has physical sense and respective dimension depending on particular subject area and affects partial desirability value. To determine the boundary value of one partial desirability being substituted for another partial desirability, the rate of substitution function and boundary rate of substitution elasticity function were established. Due to errors emerging in determination of desirability function values application of interval analysis methods was proposed. Application of interval numbers as presented in hyperbolic form was shown for calculation of partial and generalized desirability, A partial power series sum was determined relative to a variable presented in hyperbolic form. **Suggestions.** The method of calculation of Harrington function (desirability function) values at interval determination of arguments was shown to be eventually used in development of specifications and preliminary design of complicated engineering and organizational systems.

**Keywords:** Harrington function; interval analysis; golden ratio; partial desirability.