Applied problems of information systems operation

УДК 519.668:319.66 **doi:** https://doi.org/10.20998/2522-9052.2022.1.17

С. В. Гадецька[1], В. Ю. Дубницький[2], Ю. І. Кушнерук[3], О. І. Ходирєв[2]

[1] Харківський національний автомобільно-дорожній університет, Харків, Україна
[2] ННІ “Каразінський банківський інститут” ХНУ імені В. Н. Каразіна, Харків, Україна
[3] Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків, Україна

ВИКОНАННЯ ОСНОВНИХ АРИФМЕТИЧНИХ ДІЙ З КОМПЛЕКСНИМИ ЧИСЛАМИ, ЯКІ ПРЕДСТАВЛЕНО В ІНТЕРВАЛЬНІЙ ГІПЕРБОЛІЧНІЙ ФОРМІ

Анотація. **Мета роботи.** Розробка способів виконання основних арифметичних дій з інтервальними комплексними числами, які представлено в гіперболічній формі, їх модуля і аргументу. **Результати.** В роботі розглянуто метод розширення інтервальних чисел, визначених в гіперболічній формі (гіперболічних інтервальних чисел) на поле комплексних чисел. Для цього дійсну та уявну частини комплексного числа подають у формі гіперболічного інтервального числа. Встановлено зв’язки між поданням інтервальних чисел у класичній формі, системі ЦЕНТР-РАДІУС та гіперболічній формі. Запропоновано методи виконання основних арифметичних дій з гіперболічними комплексними числами, а саме: додавання, віднімання, множення та ділення. Запропоновано метод піднесення в цілочисельний додатний степінь комплексного інтервального числа, визначеного в гіперболічній формі. Запропоновано методи обчислення модулю та аргументу комплексного числа, визначеного в гіперболічній формі. Запропоновано метод визначення кореня ступеня n з інтервального комплексного числа, представленого в гіперболічній формі. Використовуючи зв’язки між гіперболічними та тригонометричними функціями запропоновано форму подання інтервального числа в тригонометричній формі. Встановлено, що найбільш доцільно виконувати дії додавання та віднімання з комплексними інтервальними числами, які мають класичну форму, або визначені в системі ЦЕНТР-РАДІУС. Операції множення, ділення та піднесення в цілочисельний степінь найбільш доцільно виконувати з комплексними інтервальними числами, які визначено в гіперболічній формі. Операцію обчислення кореня ступеня n з інтервального комплексного числа, представленого в гіперболічній формі, найбільш доцільно виконувати з сумісним використанням подання інтервального числа в системі ЦЕНТР-РАДІУС та в гіперболічній формі.

Ключові слова*:* інтервальні числа; гіперболічна форма інтервального числа; комплексні інтервальні числа; арифметичні дії з гіперболічними комплексними інтервальними числами.

Вступ

У 1893 р. один з батьків сучасної електротехніки Чарльз Протеус Штейнмец (1865-1923) запропонував використання комплексних чисел при аналізі процесів в мережах змінного струму [1]. З тих пір виклад цього методу увійшов до всіх підручників електротехніки [26] і математики для електро- і радіоінженерів [2]. Розвиток інтервального аналізу привів до поєднання цих методів [3, 4]. У роботі [5] було запропоновано представлення дійсного інтервального числа в так званій гіперболічній формі.

Аналіз літератури. Відповідно до [6-8] в даній роботі дійсне інтервальне число [A] буде визначено у вигляді пари дійсних чисел:

$$[\mathrm{A}]=(a_1, a_2) \quad 0<a_1 \le a_2 . \tag{1}$$

Будемо вважати, що умова (1) визначає інтервальне число в класичній формі. Основні арифметичні дії з інтервальними числами в цьому випадку виконують за правилами:

$$[A]+[B]=(a_1,a_2)+(b_1,b_2)=\left[(a_1+b_1),(a_2+b_2)\right]; \tag{2}$$

$$[A]-[B]=(a_1,a_2)-(b_1,b_2)=\left[(a_1-b_2),(a_2-b_1)\right]; \tag{3}$$

$$\begin{gathered}[A]\cdot[B]=\left(\min(U),\max(U)\right), \\ U=\left(a_1b_1,a_1b_2,a_2b_1,a_2b_2\right);\end{gathered} \tag{4}$$

$$[A]/[B]=(a_1,a_2)\cdot(1/b_2,1/b_1), \quad 0\notin[b_1,b_2]. \tag{5}$$

В роботі [9] запропоновано представлення інтервального числа $\langle A\rangle$ у системі ЦЕНТР-РАДІУС як упорядкованої пари дійсних чисел:

$$\langle A\rangle=\langle a, r_a\rangle \tag{6}$$

де $$a=(a_1+a_2)/2, \quad r_a=(a_2-a_1)/2 . \tag{7}$$

У подальшому будемо приймати, що $|r_a|<|a|$. Інші випадки в роботі не розглянуто, тому що вони не відповідали фізичному змісту задач, які розв’язували автори даного повідомлення. Основні арифметичні дії з інтервальними числами в системі ЦЕНТР-РАДІУС виконують за правилами, наведеними в [9]:

$$A+B=\langle a+b, r_a+r_b\rangle; \tag{8}$$

$$A-B=\langle a-b, r_a+r_b\rangle. \tag{9}$$

У роботі [5] прийнята умова, що межі інтервалів, які визначають дані числа, утворені обчислювальними помилками, похибками вимірювань або неповним знанням області зміни деякої фізичної величини. Тому повинні виконуватися нерівності:

$$a\ge r_a\ge 0, \; b\ge r_b\ge 0 . \tag{10}$$

У протилежному випадку будемо вважати, що задача, в межах наших уявлень про об'єкт дослідження, фізичного змісту не має.

В роботі [9] запропоновано формули для виконання в системі ЦЕНТР-РАДІУС операцій ділення та множення в такому вигляді:

$$\langle a, r_a \rangle \langle b, r_b \rangle = \langle ab + r_a r_b, ar_b + br_a \rangle; \quad (11)$$

$$\frac{\langle a, r_a \rangle}{\langle b, r_b \rangle} = \left\langle \frac{ab + r_a r_b}{b^2 - r_b^2}, \frac{ar_b + br_a}{b^2 - r_b^2} \right\rangle. \quad (12)$$

В роботі [9] запропоновано піднесення в цілий додатний степінь інтервального числа [A]= (a_1, a_2), яке визначено в класичній формі, виконувати за правилом:

$$[A]^n = \begin{cases} \left[a_1^n, a_2^n\right], \quad якщо\ a_1 > 0; \\ \left[0, \max\left\{a_1^n, a_2^n\right\}\right], якщо\ 0 \in \left[a_1, a_2\right], \\ \qquad n = 2k, k = 1,2,...; \\ \left[a_1^n, a_2^n\right], якщо\ 0 \in \left[a_1, a_2\right], \\ \qquad n = 2k+1, k = 0,1,2,...; \\ \left[a_2^n, a_1^n\right], якщо\ a_2 < 0, n = 2k, k = 1,2,...; \\ \left[a_1^n, a_2^n\right], якщо\ a_2 < 0, n = 2k+1. \end{cases} \quad (13)$$

Для тієї ж операції, яку виконують в системі ЦЕНТР-РАДІУС, в [9] наведено співвідношення:

$$A^n = \langle a, r_a \rangle^n = \langle G, R \rangle \quad (14)$$

за умови, що $n \in Z$. Тоді:

$$G = \sum_{k=0}^{n} C_n^{2k} r_a^{2k} a^{n-2k};$$
$$R = \sum_{k=0}^{n} C_n^{2k+1} r_a^{2k+1} |a|^{n-(2k+1)}. \quad (15)$$

Для $n = 2$ отримаємо:

$$\langle A \rangle^2 = \left\langle a^2 + r_a^2, 2 \cdot |a| \cdot r_a \right\rangle. \quad (16)$$

В роботах [5, 10] запропоновано гіперболічну форму подання інтервального числа. У цьому варіанті інтервальне число x записують у вигляді:

$$x = \rho(ch\phi + \theta \cdot sh\phi). \quad (17)$$

У співвідношенні (17) прийнято, що θ – спеціальний символ. За замовченням вважають, що $\theta^2 = 1$. Величину ρ в роботах [5, 10] названо гіпермодулем, величину ϕ – аргументом гіперболічного інтервального числа (гіперболічного числа, згідно з термінологією, яка прийнята в роботі [5]). Величини ρ і ϕ визначають за співвідношеннями:

$$\rho = \sqrt{a_1 a_2}, \ \phi = \frac{1}{2}\ln\frac{a + r_a}{a - r_a} = \frac{1}{2}\ln\frac{a_2}{a_1}. \quad (18)$$

Із співвідношення (18) виходить, що гіпермодуль – це середня геометрична меж інтервалу. Відповідно до роботи [5] в табл. 1 наведено зв'язки між різними формами подання інтервальних чисел, які буде розглянуто в даній роботі.

Таблиця 1 – **Зв'язки між різними формами подання інтервальних чисел**

Форми подання інтервальних чисел	Форми подання інтервальних чисел		
	Класична, $[A] = (a_1, a_2)$	Система ЦЕНТР-РАДІУС, $\langle A \rangle = \langle a, r_a \rangle$	Гіперболічна, $x = f(\rho, \phi)$
Класична, $[A] = (a_1, a_2)$	$[A] = (a_1, a_2)$	$[A] = (a - r_a, a + r_a)$	$[A] = (\rho[ch\phi - sh\phi], \rho[ch\phi + sh\phi])$
Система ЦЕНТР-РАДІУС, $\langle A \rangle = \langle a, r_a \rangle$	$\langle A \rangle = \left\langle \frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_2 - a_1}{2} \right\rangle$	$\langle A \rangle = \langle a, r_a \rangle$	$\langle A \rangle = \langle \rho \cdot ch\phi, \rho \cdot sh\phi \rangle$
Гіперболічна, $x = f(\rho, \phi)$	$[A] = \left(\sqrt{a_1 a_2}\, ch(\phi), \sqrt{a_1 a_2}\, sh(\phi)\right)$ $\phi = 0.5 \cdot \ln a_2/a_1$	$\langle A \rangle = \sqrt{a^2 - r_a^2} \cdot (ch\phi + \theta \cdot sh\phi)$ $\phi = 0.5 \cdot \ln(a + r_a)/(a - r_a)$	$x = \rho(ch\phi + \theta \cdot sh\phi)$

Основні арифметичні дії для пари гіперболічних чисел $x = \rho(ch\phi + \theta \cdot sh\phi)$ та $y = \delta(ch\psi + \theta \cdot sh\psi)$ відповідно до [5, 10], виконують за правилами:

$$x + y = (\rho \cdot ch\phi + \delta \cdot ch\psi) + \theta(\rho \cdot sh\phi + \delta \cdot sh\psi). \quad (19)$$

$$x - y = (\rho \cdot ch\phi - \delta \cdot ch\psi) + \theta(\rho \cdot sh\phi - \delta \cdot sh\psi). \quad (20)$$

$$x \cdot y == \rho\delta(ch(\phi + \psi) + \theta \cdot sh(\phi + \psi)) \quad (21)$$

$$x^{-1} = (\rho(ch\phi + \theta \cdot sh\phi))^{-1} = \frac{1}{\rho}(ch(-\phi) + \theta \cdot sh(-\phi)). \quad (22)$$

$$\frac{x}{y} = \frac{\rho}{\delta}(ch(\phi - \psi) + \theta \cdot (sh(\phi - \psi)). \quad (23)$$

$$x^n = (\rho(ch\phi + \theta \cdot sh\phi))^n = \rho^n(ch(n\phi) + \theta \cdot sh(n\phi)). \quad (24)$$

Також в роботі [5] розглянуто випадки, в яких одна з величин стала. Тоді отримаємо:

$$c \pm x = (c \pm \rho \cdot ch\phi) \pm \theta \cdot sh(\phi). \quad (25)$$

Для множення сталої величини c на гіперболічне число x отримаємо:

$$cx = c\rho(ch\phi + \theta \cdot sh\phi). \quad (26)$$

Для операції ділення у вказаній роботі наведено два варіанти операції. У першому варіанті:

$$x/c = (\rho/c) \cdot (ch\phi + \theta \cdot sh\phi). \quad (27)$$

У другому варіанті:

$$c/x = (c/\rho) \cdot (ch\phi - \theta \cdot sh\phi). \quad (28)$$

Враховуючи потреби електротехніки й інших інженерних дисциплін в роботах [6, 10, 13] описано розширення основних понять і методів інтервальної арифметики на комплексну площину. Відповідно до цих робіт комплексне інтервальне число [Z] визначимо таким чином:

$$\left[\dot{Z}\right] = \left[X\right] + \left[Y\right] \cdot i = (x_1, x_2) + \left(y_1, y_2\right) \cdot i\,,\ i = \sqrt{-1}\,. \quad (29)$$

Тобто, геометричним образом комплексного інтервального числа буде прямокутник, визначений на комплексній площині, геометричним образом дійсного інтервального числа буде відрізок числової осі. Відповідно до [14] для зручності подальших обчислень представимо комплексне інтервальне число у вигляді впорядкованої пари $\left[\dot{Z}\right] = \left\langle [X],[Y] \right\rangle$ і виконаємо основні арифметичні дії за правилами:

$$\left[\dot{Z}\right]_1 + \left[\dot{Z}\right]_2 = \left\langle [X]_1 + [X]_2 ; [Y]_1 + [Y]_2 \right\rangle; \quad (30)$$

$$\left[\dot{Z}\right]_1 - \left[\dot{Z}\right]_2 = \left\langle [X]_1 - [X]_2 ; [Y]_1 - [Y]_2 \right\rangle; \quad (31)$$

$$\left[\dot{Z}\right]_1 \left[\dot{Z}\right]_2 = \\ = \left\langle [X]_1 [X]_2 - [Y]_1 [Y]_2 ; [X]_1 [Y]_2 + [X]_2 [Y]_1 \right\rangle; \quad (32)$$

$$\left[\dot{Z}\right]_1 \Big/ \left[\dot{Z}\right]_2 = \\ = \left\langle \frac{[X]_1 [X]_2 + [Y]_1 [Y]_2}{[X]_1^2 + [X]_2^2} ; \frac{[X]_2 [Y]_1 - [X]_1 [Y]_2}{[X]_1^2 + [X]_2^2} \right\rangle. \quad (33)$$

Для визначення модуля дійсного інтервального числа вигляду (1) в [6, 7, 12] є співвідношення:

$$\left\| [A] \right\| = \max\left\{ |a_1|, |a|_2 \right\}. \quad (34)$$

Для модуля комплексного інтервального числа вигляду (29) в роботах [11, 13] є співвідношення:

$$\left\| \left[\dot{Z}\right] \right\| = \sqrt{\left\| [X] \right\|^2 + \left\| [Y] \right\|^2} = \\ = \sqrt{\left| \max(x_1, x_2) \right|^2 + \left| \max(y_1, y_2) \right|^2}\,. \quad (35)$$

З приведеного аналізу виходить, що в літературі описано зведення про виконання основних арифметичних дій з інтервальними комплексними числами, представленими тільки в класичній формі.

Постановка задачі. Розробка способів виконання основних арифметичних дій з інтервальними комплексними числами, які представлено в гіперболічній формі, їх модуля і аргументу.

Отримані результати

Виконання основних арифметичних дій з інтервальними комплексними числами, які представлено в гіперболічній формі. Розглянемо пару комплексних інтервальних чисел, в яких дійсну і уявну частини представлено в гіперболічній формі, відповідно до співвідношення (17):

$$\left[\dot{Z}\right]_1 = x_1 + iy_1 = \\ = \left\{ \rho(ch\phi + \theta \cdot sh\phi) \right\} + i \left\{ \delta(ch\psi + \theta \cdot sh\psi) \right\}; \quad (36)$$

$$\left[\dot{Z}\right]_2 = x_2 + iy_2 = \\ = \left\{ \gamma(ch\omega + \theta \cdot sh\omega) \right\} + i \left\{ \lambda(ch\eta + \theta \cdot sh\eta) \right\}. \quad (37)$$

Використовуючи (19)…(23) і (29)…(32), отримаємо наступні співвідношення для основних арифметичних дій з комплексними інтервальними числами, представленими в гіперболічній формі. Суму двох інтервальних комплексних чисел у цьому випадку можна представити у вигляді:

$$T_1 = \left[\dot{Z}\right]_1 + \left[\dot{Z}\right]_2 = R_1 + iE_1\,, \quad (38)$$

де
$$R_1 = (\rho ch\phi + \gamma ch\omega) + \theta\left(\rho sh\phi + \lambda sh\omega\right); \quad (39)$$

$$E_1 = (\delta ch\psi + \lambda ch\eta) + \theta\left(\rho sh\psi + \lambda sh\eta\right). \quad (40)$$

Різницю двох інтервальних комплексних чисел у цьому випадку можна представити у вигляді:

$$T_2 = \left[\dot{Z}\right]_1 - \left[\dot{Z}\right]_2 = R_2 + iE_2\,, \quad (41)$$

де
$$R_2 = (\rho ch\phi - \lambda ch\omega) + \theta\left(\rho sh\phi - \lambda sh\omega\right); \quad (42)$$

$$E_2 = (\delta ch\psi - \lambda ch\eta) + \theta\left(\rho sh\psi - \lambda sh\eta\right). \quad (43)$$

Добуток двох інтервальних комплексних чисел у цьому випадку можна представити у вигляді:

$$T_3 = \left[\dot{Z}\right]_1 \times \left[\dot{Z}\right]_2 = R_3 + iE_3\,, \quad (44)$$

де
$$R_3 = \rho\gamma\left[ch(\phi + \omega) + \theta sh(\phi + \omega)\right] - \\ -\lambda\delta\left[ch(\psi + \eta) + \theta sh(\psi + \eta)\right]; \quad (45)$$

$$E_3 = \rho\lambda\left[ch(\phi + \eta) + \theta sh(\phi + \eta)\right] + \\ +\gamma\delta\left[ch(\omega + \psi) + \theta sh(\omega + \psi)\right]. \quad (46)$$

Результат ділення двох інтервальних комплексних чисел у цьому випадку можна представити як

$$T_4 = \left[\dot{Z}\right]_1 \Big/ \left[\dot{Z}\right]_2 = R_4 + iE_4\,, \quad (47)$$

де
$$R_4 = \frac{\left[\rho\gamma\left(ch\left(\phi + \omega\right) + \theta \cdot sh(\phi + \omega)\right)\right] + \left[\delta\lambda\left(ch(\psi + \eta) + \theta \cdot sh(\psi + \eta)\right)\right]}{\left[\gamma^2\left(ch\left(2\omega\right) + \theta \cdot sh\left(2\omega\right)\right)\right] + \left[\lambda^2\left(ch\left(2\eta\right) + \theta \cdot sh\left(2\eta\right)\right)\right]}; \quad (48)$$

$$E_4 = \frac{\left[\gamma\delta\left(ch(\omega+\psi)+\theta\cdot sh(\omega+\psi)\right)\right]-\left[\rho\lambda\left(ch(\phi+\eta)+\theta\cdot sh(\phi+\eta)\right)\right]}{\left[\gamma^2\left(ch(2\omega)+\theta\cdot sh(2\omega)\right]+\left[\lambda^2\left(ch(2\eta)+\theta\cdot sh(2\eta)\right)\right]}. \quad (49)$$

Піднесення в цілий додатний степінь комплексного інтервального числа, представленого в гіперболічній формі. Для піднесення комплексного інтервального числа $\left[\dot{Z}\right]$, яке представлено в гіперболічній формі:

$$\left[\dot{Z}\right] = \left\{\rho(ch\phi+\theta\cdot sh\phi)\right\}+i\left\{\delta(ch\psi+\theta\cdot sh\psi)\right\} \quad (50)$$

у цілий додатний степінь n, виділимо його дійсну a і уявну b частини, які дорівнюють відповідно:

$$a=\rho(ch\phi+\theta\cdot sh\phi),\ b=\delta(ch\psi+\theta\cdot sh\psi) \quad (51)$$

Тоді отримаємо, що:

$$\left[\dot{Z}\right]^n = (a+bi)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}(ib)^k . \quad (52)$$

Використовуючи (21) для співвідношення (52) отримаємо:

$$a^{n-k} = \rho^{n-k}\left[ch((n-k)\phi)+\theta\cdot sh((n-k)\phi)\right]\ ; \quad (53)$$

$$(ib)^k = i^k[\delta^k(ch(k\psi)+\theta\cdot sh(k\psi))]. \quad (54)$$

Використовуючи поняття порівняння по модулю, яке використовують в теорії чисел і яке викладено в [15], величину i^k визначимо таким чином:

$$i^k = \begin{cases} 1, & якщо \quad k \equiv 4\,\mathrm{mod}(0); \\ i, & якщо \quad k \equiv 4\,\mathrm{mod}(1); \\ -1, & якщо \quad k \equiv 4\,\mathrm{mod}(2); \\ -i, & якщо \quad k \equiv 4\,\mathrm{mod}(3). \end{cases} \quad (55)$$

Таким чином, отримаємо, що:

$$\left[\dot{Z}\right]^n = \sum_{k=0}^{n}\begin{bmatrix} C_n^k\cdot i^k\rho^{n-k}\cdot\left[ch(k\psi)+\theta\cdot sh(k\psi)\right]\times \\ \times\delta^k\cdot\left[ch((n-k)\phi)+\theta\cdot sh((n-k)\phi)\right]\end{bmatrix}. \quad (56)$$

Визначення аргументу комплексного інтервального числа, яке представлено в гіперболічній формі. Слід зауважити, що в роботі [16] детально розглянуто задачі і методи інтервальної геометрії, але визначення кута відсутнє. Тому, по аналогії з класичною теорією комплексних чисел, визначатимемо аргумент гіперболічного комплексного числа $\left[\dot{Z}\right]$, як відношення уявної частини числа до його дійсної частини.

Для цього виконаємо такі перетворення:

$$d = \frac{\delta(ch\psi+\theta\cdot sh\psi)}{\rho(ch\phi+\theta\cdot sh\phi)} = \frac{\delta}{\rho}\left[ch(\psi-\phi)+\theta\cdot sh(\psi-\phi)\right]. \quad (57)$$

Приймемо, що:

$$\delta/\rho=\chi \quad \psi-\phi=\tau . \quad (58)$$

Враховуючи співвідношення (17) і (57), співвідношення (58) прийме вигляд:

$$d=\chi(ch\tau+\theta\cdot sh\tau). \quad (59)$$

Отже:

$$\arg\left[\dot{Z}\right] = \begin{cases} arctg(d), & якщо \quad R>0, \\ \pi+arctg(d), & якщо \quad R<0, E\ge 0, \\ -\pi+arctg(d), & якщо \quad R<0, E<0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & якщо \quad R=0, E>0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & якщо \quad R=0, E<0. \end{cases} \quad (60)$$

В умову (60) входять інтервальні числа і відносини між ними: <, >, $\ge$. Застосування цих відносин для порівняння інтервальних величин розглянуто в роботах [17, 22, 23].

Обчислення функції $[U]=arctg[X]$ для інтервального числа, заданого в гіперболічній формі. Обчислення цієї функції для аргументу, який задано у вигляді інтервального числа, визначеного в системі ЦЕНТР-РАДІУС, розглянуто в роботі [17]. У даному повідомленні розглянута можливість використання методів, викладених в роботах [18]…[21] і призначених для обчислення значень функції $y=arctg(x)$ дійсного аргументу x (табл. 2), та оцінено можливість їх використання для аргументу, заданого у вигляді інтервального гіперболічного числа.

Таблиця 2 – **Методи обчислення функції $y=arctg(x)$ дійсного аргументу x**

№	L*	Метод обчислення
1	[20]	$arctg(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2(2k+1)}\cdot\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^k$, $x^2<\infty$
2	[19], [21]	$arctg(x)=\frac{x}{1+x^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2^{2k}(k)!}{(2k+1)!}\cdot\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^k$, $x^2<\infty$
3	[19], [20]	$arctg(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$, $x^2\le 1$,
4	[18]	$arctg(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$, $x^2<1$
5	[18]	$arctg(x)=\frac{\pi}{2}-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{(2k+1)x^{2k+1}}$, $x^2\ge 1$
6	[18]	$arctg(x)=\sum_{k=0}^{m}a_{2k+1}x^{2k+1}$, $x^2\le 1$
7	[18]	$arctg(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{k=0}^{m}a_{2k+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2k+1}$, $0<x<\infty$

L* – відповідні літературні джерела

З порівняння наведених у табл. 2 співвідношень випливає, що вони розрізняються обмеженнями на величину аргументу $|x|$, наприклад, для №3 і №4, №5 і №6. Крім того, для набуття чисельного значення будь-якої функції слід враховувати особливості реалізації процесу обчислень для можливих форм подання інтервальних чисел. У нашому випадку найбільш зручним може бути співвідношення №6. Для оцінки величини m у цьому співвідношенні був проведений його чисельний аналіз. Розрахункові співвідношення, використані в цьому випадку, показано в табл. 3.

Результати обчислення значень функції $y = arctg(x)$ за умови $x = -1,(0,2),1$ показано в табл. 4.

Отримані значення порівнювали з табличними значеннями, наведеними в [24]. З отриманих даних виходить, що при кількості доданків $m = 5$ результат обчислень значень функції $y = arctg(x)$ забезпечує хороше співпадіння з табличними значеннями.

Таблиця 3 – **Многочлени, використані для обчислення функції** $y = arctg(x)$

m	**Многочлени**
3	$\mathrm{arctg}(x) = 0{,}99935x - 0{,}288868x^3 + 0{,}07933x^5$
4	$\mathrm{arctg}(x) = 0{,}99921x - 0{,}321182x^3 + 0{,}14627x^5 - 0{,}03899x^7$
5	$\mathrm{arctg}(x) = 0{,}99986x - 0{,}33029x^3 + 0{,}18014x^5 -$ $-0{,}08513x^7 + 0{,}020835x^9$

Таблиця 4 – **Результати обчислення значень функції** $y = arctg(x)$

Значення аргументу, x	Значення функції $y = arctg(x)$, якщо кількість доданків многочлену дорівнює m			Табличне значення функції $y = arctg(x)$
	3	4	5	
-1	-0,7860	-0,78532	-0,7854	-0,7854
-0,8	-0,6744	-0,67468	-0,6747	-0,6747
-0,6	-0,5410	-0,54043	-0,5404	-0,5404
-0,4	-0,3804	-0,38056	-0,3805	-0,3805
-0,2	-0,1968	-0,19732	-0,1974	-0,1974
0	0	0	0	0
0,2	0,1968	0,19732	0,1974	0,1974
0,4	0,3804	0,38056	0,3805	0,3805
0,6	0,5410	0,54043	0,5404	0,5404
0,8	0,6744	0,67468	0,6747	0,6747
1	0,7860	0,78532	0,7854	0,7854

Використовуючи співвідношення (24), (55), (59 і співвідношення (№6, табл. 2) отримаємо, що:

$$\mathrm{arctg}(d) = \\ = \sum_{k=0}^{5} a_{2k+1} \left\{ (\delta/\rho)^{2k+1} \begin{bmatrix} ch((2k+1)\cdot(\psi-\phi)) + \\ +\theta \cdot sh((2k+1)(\psi-\phi)) \end{bmatrix} \right\}. \quad (61)$$

Чисельні значення коефіцієнтів a_{2k+1} вказано в табл. 3, $m = 5$. Цю величину слід підставити в (59) для отримання аргументу комплексного інтервального числа, визначеного в гіперболічній формі.

Визначення модуля інтервального комплексного числа, представленого в гіперболічній формі. Відповідно до робіт [8, 13] і співвідношень (23) і (34) модуль комплексного інтервального числа

$$\left[\dot{Z}\right] = [R] + i[E] = \left\{ \begin{array}{l} \rho(ch\phi + \theta \cdot sh\phi) + \\ +i\left\{\delta(ch\psi + \theta \cdot sh\psi)\right\} \end{array} \right\} \quad (62)$$

визначимо як співвідношення вигляду:

$$\left\|\left[\dot{Z}\right]\right\| = \sqrt{[R]^2 + [E]^2} = \sqrt{\begin{array}{l} \left\{\rho(ch\phi + \theta \cdot sh\phi)\right\}^2 + \\ +\left\{\delta(ch\psi + \theta \cdot sh\psi)\right\}^2 \end{array}}. \quad (63)$$

Розкриваючи підкореневий вираз в (63) та беручи до уваги (24), отримаємо:

$$\left\|\left[\dot{Z}\right]\right\| = \sqrt{\begin{array}{l} \left\{\rho^2(ch(2\phi) + \theta \cdot sh(2(\phi))\right\} + \\ +\left\{\delta^2(ch(2\psi) + \theta \cdot sh(2\psi))\right\} \end{array}}. \quad (64)$$

Спрощуючи (63) і зважаючи на (19), отримаємо:

$$\left\|\left[\dot{Z}\right]\right\| = \sqrt{\begin{array}{l} \left[\rho^2 ch(2\phi) + \delta^2 ch(2\psi)\right] + \\ +\theta\left[\rho^2 sh(2\phi) + \delta^2 sh(2\psi)\right] \end{array}}. \quad (65)$$

Для зручності подальших обчислень перейдемо від гіперболічної форми інтервального числа до інтервального числа, визначеного в системі ЦЕНТР-РАДІУС. Для цього використаємо результати роботи [5] і табл. 1 даного повідомлення:

$$\left|\left\langle \dot{Z} \right\rangle\right| = \sqrt{\left\langle \begin{array}{l} (\rho^2 ch(2\phi) + \delta^2 ch(2\psi)); \\ (\rho^2 sh(2\phi) + \delta^2 sh(2\psi)) \end{array} \right\rangle} = \sqrt{\left\langle \dot{z}, r_z \right\rangle} = \\ = \left\langle \exp\left(\frac{1}{2}\ln\left\langle \dot{z}, r_z \right\rangle\right)\right\rangle. \quad (66)$$

Оскільки результат розрахунку, який наведено в (65), отримано в системі ЦЕНТР-РАДІУС, то для переходу до гіперболічної форми інтервального числа використаємо співвідношення табл. 1, отже:

$$\left\|\left[\dot{Z}\right]\right\| = \sqrt{\left(\dot{z}\right)^2 - r_z^2} \times \\ \times\left(ch\left(\frac{1}{2}\ln\frac{\dot{z}+r_z}{\dot{z}-r_z}\right) + \theta \cdot sh\left(\frac{1}{2}\ln\frac{\dot{z}+r_z}{\dot{z}-r_z}\right)\right). \quad (67)$$

Обчислення кореня ступеня n з інтервального комплексного числа, представленого в гіперболічній формі. Обчислення кореня ступеня n з комплексного числа $\hat{z} = \hat{a} + i\hat{b}$, визначеного в традиційному вигляді, виконують, використовуючи таке співвідношення ($s = 0,1,...,n-1$):

$$\hat{z}^{\frac{1}{n}} = \left(\hat{a}^2 + \hat{b}^2\right)^{\frac{1}{2n}} \left(\begin{array}{l} \cos\left(\left(arctg(\hat{b}/\hat{a}) + 2s\pi\right)/n\right) + \\ +i\sin\left(\left(arctg(\hat{b}/\hat{a}) + 2s\pi\right)/n\right) \end{array} \right). \quad (68)$$

Докладніше умови застосування співвідношення (66) розглянуто в [14] або в будь-якому іншому посібнику аналогічного змісту. Приймемо, що:

$$H^{1/(2n)} = \left(\hat{a}^2 + \hat{b}^2\right)^{1/(2n)}; \quad (69)$$

$$T = \cos\frac{arctg(\hat{b}/\hat{a}) + 2s\pi}{n} + i\sin\frac{arctg(\hat{b}/\hat{a}) + 2s\pi}{n}. \quad (70)$$

Тоді співвідношення (71) отримає вигляд:

$$z^{1/n} = H^{1/(2n)}T. \quad (71)$$

Зважаючи на співвідношення (65), (66) отримаємо:

$$\left[H\right]^{\frac{1}{2n}} = \left\{ \begin{array}{l} \left[\rho^2 ch(2\phi) + \delta^2 ch(2\psi)\right] + \\ +\theta\left[\rho^2 sh(2\phi) + \delta^2 sh(2\psi)\right] \end{array} \right\}^{\frac{1}{2n}} = \left\langle h, r_h \right\rangle^{\frac{1}{2n}}. \quad (72)$$

У співвідношенні (72) результат складання інтервальних чисел, представлених в гіперболічній формі, записано у формі інтервального числа, представленого в системі ЦЕНТ-РАДІУС. Правила такого переходу обґрунтовано в роботі [5] і представлено в табл. 1. Отже:

$$\left[H\right]^{1/(2n)} = \left\langle h, r_h \right\rangle^{1/(2n)} = \left\langle \exp\left(\frac{1}{2n}\right)\ln\left\langle h, r_h \right\rangle \right\rangle. \quad (73)$$

Розкриваючи співвідношення (73) і повертаючись до гіперболічної форми подання, отримаємо:

$$\begin{array}{l} \left[H\right]^{1/(2n)} = \sqrt{h^2 - r_h^2} \times \\ \times\left(\mathrm{ch}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{h + r_z}{h - r_h}\right) + \theta\cdot\mathrm{sh}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{h + r_z}{h - r_h}\right)\right). \end{array} \quad (74)$$

Для визначення величини $\mathrm{arctg}(d)$ розкриємо дужки в (61 та отримаємо:

$$\begin{array}{l} \mathrm{arctg}(d) = \sum_{k=0}^{5} a_{2k+1}\left\{\left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{2k+1}\left[\mathrm{ch}((2k+1)\cdot(\psi - \phi)\right]\right\} + \\ +\theta\sum_{k=0}^{5} a_{2k+1}\left\{\left(\frac{\delta}{\rho}\right)^{2k+1}\left[\mathrm{sh}((2k+1)\cdot(\psi - \phi))\right]\right\}. \end{array} \quad (75)$$

Отже:

$$\left[T\right] = \left[\cos\frac{arctg(d) + 2s\pi}{n} + i\sin\frac{arctg(d) + 2s\pi}{n}\right]. \quad (76)$$

Таким чином, для обчислення кореня ступеня n з інтервального комплексного числа, представленого в гіперболічній формі, необхідно виконати дії, передбачені співвідношеннями (71)…(75) і подати результат у вигляді співвідношення (76)

$$\left[\overset{\bullet}{Z}\right]^{1/n} = \left[H\right]^{1/(2n)}\left[T\right]. \quad (77)$$

Тригонометрична форма подання інтервального числа. Залежність між гіперболічними і тригонометричними функціями можна встановити двома способами, які детально розглянуто в роботі [25]. Один із них використовує поняття гіперболічної амплітуди або гудерманіана, другий базується на використанні уявної одиниці – числа i. Гудерманіан аргументу ϕ - ($gd(\phi)$), використаного в (17), визначають по співвідношенню:

$$gd(\phi) = 2arctg\left(e^{\phi}\right) - \frac{\pi}{2}. \quad (78)$$

Тоді інтервальне число вигляду (17), перетворене в тригонометричну форму, набуде вигляду:

$$x_t = \rho\left(\frac{1}{\cos(gd(\phi))} + \theta\cdot tg(gd(\phi))\right). \quad (79)$$

У роботі [25] наведено співвідношення між гіперболічними і тригонометричними функціями:

$$\cos(i\phi) = ch(\phi) \quad \sin(i\phi) = i\cdot sh(\phi). \quad (80)$$

Отже, інтервальне число, визначене в тригонометричній формі, прийме вигляд:

$$x_t = \rho\left[\cos(i\phi) - i\theta\sin(i\phi)\right]. \quad (81)$$

Порівняння форм представлення інтервальних чисел, визначених в гіперболічній формі (15) з тригонометричною (78), (81) дозволяє зробити висновок про те, що для подальших обчислень гіперболічна форма зручніша за тригонометричну.

Історико-бібліографічне доповнення

Автори даного повідомлення не ставлять за мету подати докладний виклад подій, пов'язаних з окремими епізодами з історії електротехніки або історії математики. Мета даного розділу – короткий бібліографічний опис перших робіт, в яких викладено застосування комплексних чисел для аналізу ланцюгів змінного струму. Детально життя Ч. П. Штейнмеца і значення для сучасної електротехніки зроблених ним відкрить описано в [27]. Більшість сучасних студентів-електриків, що читають розклад іспитів, навіть не знають, що читають назви монографій Штейнмеца: «Теоретичні основи електротехніки» або « Теорія і розрахунок електричних ланцюгів».

Слід звернути увагу на таку деталь – на титульному аркуші роботи [1] зазначено, що переклад виконано не просто І. А. Ждановим, а інженером І. А. Ждановим, що свідчить про високий авторитет цього звання на початку XX століття.

Застосування комплексних чисел в електротехніці отримало назву символічного методу. Негайно розпочалися дискусії про пріоритет, обґрунтованість цього методу і таке інше. Будь-яке крупне наукове відкриття супроводжується тим, що в [28] названо «драмою ідей». Її наукові і психологічні особливості розглянуто в [29]. У даний час пріоритет Штейнмеца в застосуванні комплексних чисел в електротехніці загальновизнаний [30]. Авторам даного повідомлення вдалося знайти роботи [2, 31, 32, 33, 34], мету яких в роботі [32] сформульовано так: «Дана книга призначена як для студентів, так і для інженерів, які прагнуть відновити, доповнити і систематизувати свої пізнання в математиці. Зміст книги визначено бажанням автора дати інженеру-виробничнику, по можливості, той математичний матеріал, який потрібний йому не тільки безпосередньо в практичній діяльності, але і для читання технічної літератури, так само як і для орієнтування в методах розв'язання основних задач його спеціальності. Усвідомлюючи, що цінність математичної теорії для інженера в значній мірі вимірюється можливістю її практичного застосування, автор прагнув довести цю теорію до числа і приділив велику увагу різним обчислювальним, графічним і механічним прийомам, що полегшують набуття наближеного значення величини». Початок роботам такого призначення поклав Штейнмец, опублікувавши в 1910 р. посібник з математики з характерною назвою: «Engineering Mathematics» («Технічна математика»).

З 1893 р. і до кінця свого життя (30 років) Штейнмец працював на фірмі General Electric Company (GEC). За всю історію цієї фірми він був єдиним співробітником, який жодного разу не отримав зарплатню. Фірма надала йому відкритий рахунок. У момент похорон Штейнмеца всі підприємства General Electric на п'ять хвилин припинили роботу.
Кажуть, що пісня стає народною, коли її співають всі, а авторів не знає ніхто. Символічний метод Штейнмеца використовують всі інженери і студенти-електрики, але ім'я його невідоме, хоча всім відомі рівні по значенню перетворення Лапласа і функція Хевісайда. Якщо говорити про час, в якому жив Штейнмец і його найясніші сучасники, то краще всього про це сказала Ніка Турбіна:

Досталась доля так себе, нелёгкая судьба,
Ни белой лилии в гербе, ни самого герба.
Когда скончался он – переменилась роль,
И жил не он при короле, а жил при нём король.

Для появи і правильного розуміння символічного методу в інженерному співтоваристві того часу повинні були бути добре відомі операції, пов'язані з комплексними числами. Теорію комплексних чисел до кінця XIX ст. було включено в програми з елементарної і вищої математики багатьох навчальних закладів [35]. Слід зазначити, що автор роботи [35] – Ф. Клейн (1849-1925) відомий не тільки своїм видатним внеском в математику, але і тим, що був першим головою Міжнародної комісії з математичної освіти (1908 р.). Докладний стан викладання теорії комплексних чисел наприкінці XIX ст. та на початку XX ст. розглянуто в роботі [36]. При вивченні вихідних даних цієї роботи слід звернути увагу на автора перекладу і доповнень – І. Ю. Тимченка. Його посада на момент виходу роботи [36] була приват-доцент. Відповідно до правил тих років [37] приват-доценти були університетськими викладачами, які не входили до складу штатних викладачів і читали лекції, не отримуючи за це грошову винагороду. При вступі на цю посаду вони були зобов'язані прочитати одну або дві публічні (пробні) лекції і (або) захистити дисертацію pro venia legendi, яка давала право на читання лекцій. Авторам даного повідомлення вдалося встановити долю І. Ю. Тимченка [38]. Професор І. Ю. Тимченко працював в Одеському університеті і до 1936 р. був деканом математичного факультету. У 1933-1938 рр. читав курси історії математики, теорії ймовірностей, геометрії. У 1938 р. у віці 75 років І. Ю. Тимченко був заарештований по сфабрикованому звинуваченню і лише весною 1939 р. звільнений «через відсутність доказів». Арешт і рік, проведений у в'язниці, остаточно підірвали його здоров'я. Він помер 30 серпня 1939 р. Ну, як тут не пригадати сумну іронію Юза Алешковського:

Вчера мы хоронили двух марксистов,
Тела одели ярким кумачом.
Один из них был правым уклонистом,
Другой, как оказалось, ни при чем.

Особливості викладання теорії комплексних чисел в середніх навчальних закладах Російської Імперії в даний період можна зрозуміти з робіт [39, 40]. Як випливає з авторських передніх слів до цих робіт, вони були призначені для гімназій і реальних училищ. У містах Росії реальні училища з 6-річним і 7-річним терміном навчання існували з 1872 р. На відміну від гімназій головну увагу в реальних училищах приділяли математиці, фізиці, природознавству, стародавні мови в них не вивчали. Випускники реальних училищ не мали права вступу до університетів, але могли продовжувати освіту в технічних, торгових, промислових вищих навчальних закладах. Зрозуміти чому, кажучи сучасною мовою, випускник середнього навчального закладу з поглибленим вивченням фізики і математики не мав права поступати на фізико-математичний факультет університету тільки тому, що не вивчав стародавні мови, але володів в достатньому об'ємі основними мовами техніки і науки того часу – німецькою та французькою, неможливо. Втім, як і неможливо зрозуміти бюрократичну логіку у всі часи. Перш ніж переходити до аналізу робіт [39, 40] слід сказати декілька слів про їх авторів. А. П. Кисельов (1852-1940) – автор легендарного підручника [39], що витримав з 1888 р. по 1965 р. 42 видання.

Приємно відзначити, що на початку трудової діяльності А. П. Кисельову істотну підтримку надав Харківський навчальний округ, що виділив йому в 1879 р. 100 рублів для наукових відряджень. Для порівняння – місячний грошовий оклад поручика складав 70 рублів. У 1890 році протягом року А. П. Кисельов працював у Харкові. А. П. Кисельов закінчив свою діяльність на державній службі в чині титульного радника, проміжного між полковником і генерал-майором [41]. Переклад роботи [40] і написання доповнень до неї, фактично розробку нового підручника, виконав М. І. Білібін (1846-1914), старший сучасник А. П. Кисельова, автор і перекладач відомих на той час підручників з математики. У відставку Н. І. Білібін вийшов у чині дійсного статського радника (генерал-майора) [42]. Ці два приклади показують, який авторитет у суспільстві і державі мали викладачі гімназій. Останню згадку про використання комплексних чисел у курсі середньої школи автори даного повідомлення змогли знайти в роботі [43]. Порівняння робіт [40], [41], [43] показує, що їх зміст приблизно однаковий. В них розглянуто всі основні дії з комплексними числами, представленими в алгебраїчній та тригонометричній формах. Докладніший аналіз методичних особливостей цих підручників виходить за рамки даного повідомлення. В роботі [39] наведено опис методу визначення квадратного кореня з комплексного числа, записаного в алгебраїчній формі:

$$\sqrt{a+bi} = \begin{cases} \pm\left[\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}+i\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right], & b>0; \\ \pm\left[\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}}-i\sqrt{\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}\right], & b<0. \end{cases} \quad (82)$$

Детально історію створення Ч. Штейнмецом символічного методу описано в роботі [27]. Проте розповсюдження цього методу не було таким безхмарним, як це описано у вказаній роботі. Щоб переконатися в цьому звернемося до довідника HÜTTE [44], [45]. Вже об'єм томів, не менше ніж 1000 стор. у кожному, свідчить про його енциклопедичність. Один з персонажів роботи [46] говорить про довідник HÜTTE так: «Хютте – найповніший і найточніший довідник по всіх існуючих розділах фізики і механіки. Для інженера – незамінна настільна книга». У першому томі цього довідника [44] в розділі «Математика» зведення про комплексні числа викладено приблизно так, як це зроблено в сучасних роботах, наприклад в [47]. У той же час у третьому томі цього ж довідника, у відділі «Електротехніка», зведення про застосування комплексних чисел в електротехніці відсутні. У навчальній літературі застосування комплексних чисел при вивченні змінного струму стає обов'язковим з 1911 р. [48]. Прочитавши вихідні дані книги залишається з ностальгічним смутком роздумувати про часи, коли звання інженера з гордістю писали на титульних аркушах книг, дверних табличках і надмогильних пам'ятниках.

Висновки

1. В роботі розглянуто метод розширення інтервальних чисел, визначених в гіперболічній формі (гіперболічних інтервальних чисел) на поле комплексних чисел. Для цього дійсну та уявну частини комплексного числа подано у формі гіперболічного інтервального числа.

2. Встановлено зв'язки між поданням інтервальних чисел у класичній формі, системі ЦЕНТР-РАДІУС та гіперболічній формі.

3. Запропоновано методи виконання основних арифметичних дій з гіперболічними комплексними числами, а саме: додавання, віднімання, множення та ділення.

4. Запропоновано метод піднесення в цілий додатний степінь комплексного інтервального числа, визначеного в гіперболічній формі.

5. Запропоновано методи обчислення модуля та аргументу комплексного числа, визначеного в гіперболічній формі.

6. Запропоновано метод визначення кореня ступеня n з інтервального комплексного числа, представленого в гіперболічній формі.

7. Використовуючи зв'язки між гіперболічними та тригонометричними функціями запропоновано форму подання інтервального числа в тригонометричній формі.

8. Встановлено, що доцільніше виконувати дії додавання та віднімання з комплексними інтервальними числами, які мають класичну форму, або визначені в системі ЦЕНТР-РАДІУС.

9. Встановлено, що операції множення, ділення та піднесення в цілочисельний степінь найбільш доцільно виконувати з комплексними інтервальними числами, які визначено в гіперболічній формі.

10. Встановлено, що операцію обчислення кореня ступеня n з інтервального комплексного числа, представленого в гіперболічній формі, доцільніше виконувати сумісно з використанням подання інтервального числа в системі ЦЕНТР-РАДІУС та в гіперболічній формі.

Список літератури (Reference)

1. STEINMETZ C. P.. ТЕОРЕТИЧЕСКІЯ ОСНОВАНІЯ ЭЛЕКТРОТЕХНИКИ СИЛЬНЫХЪ ТОКОВЪ. Переводъ с немецкаго изданія, просмотреннаго авторомъ. Инж. Жданова. Съ 142 фигурами в текстѣ. С. – ПЕТЕРБУРГЪ, Типографія Б. Н. Фридберга, Б. Сампсоніевскій,62. 1905.
2. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. Москва: НАУКА, 1964. 772 с.
3. Свеженцева О. В., Умнова М. О. Расчет установившихся режимов радиальной электрической сети на напряжении 0,4 кв интервальным методом. *Вестник Иркутского гос. техн. университета.* 2015. №3 (98). С. 215–222.
4. Крюков А В., Литвинцев А И Интервальное моделирование аварийных режимов электроэнергетических систем. *Системы Методы Технологии*. 2013. № 4(20). С. 73–79.
5. Дубницький В. Ю., Кобилін А. М., Кобилін О. А., Кушнерук Ю. І. EXCEL-орієнтована процедура для обчислення значень спеціальних функцій з інтервальним аргументом, заданим в гіперболічній формі. *Сучасні інформаційні системи*. Т.5, № 4, С. 116-123. doi: https://doi.org/10.20998/2522-9052.2021.4.16
6. Алефельд Г., Херцбергер Ю. Введение в интервальные вычисления. Москва: Мир, 1987. 360 с.
7. Калмыков С. А., Шокин Ю. И., Юлдашев З. Х. Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука, 1986. 223 с.
8. Шарый С. П. Конечномерный интервальный анализ. Новосибирск: XYZ, 2012. 606 с.
9. Жуковська О. А. Основи інтервального аналізу. Київ: Освіта України, 2009. 136 с.

10. Молодцов Д. А., Ковков Д. В. Введение в теорию приближенных чисел. *Вестник Тверского государственного университета.* Серия: Прикладная математика. 2011. Том 23. С. 111–128.
11. Співак І. Я., Крепич І. Я Прикладні аспекти інтервальних обчислень. Тернопіль: ФОП Паляниця В. А., 2019. 153 с.
12. Кононюк А. Е. Дискретно-непрерывная математика. Алгебры. К.4.Ч.2. К.4: Київ: Освіта України, 2011. 668 с.
13. Смирнова, Е. Н., Максименко Н. В. Элементы интервального анализа. Оренбург: ОГУ, 2015. 62 с.
14. Вербицкий И. Л., Файнберг Е. Д. Элементы теории функций комплексного переменного. Харьков: УЗПИ, 1989. 135 с.
15. Калужнин Л. А. Введение в общую алгебру. Москва: Наука, 1973. 448 с.
16. Стоян Ю. Г. Введення в інтервальну геометрію. Харків: ХІРЕ, 2006. 98 с.
17. Дубницкий В. Ю., Кобылин А. М., Кобылин О. А. Вычисление значений элементарных и специальных функций с интервально заданным аргументом, определённым в системе ЦЕНТР – РАДИУС. *Прикладная радиоэлектроника.* 2017. Том 16. №3, 4. С. 147–154.
18. Люстерник Л. А., Червоненкис О. А., Янпольский А. Р. Вычисление элементарных функций. Москва: 1963, 248 с.
19. Попов Б. А., Теслер Г.А. Вычисление функций на ЭВМ. Киев: Наукова думка, 1984. 599 с.
20. Градштейн, И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений: практическое пособие. 4-е изд., переработанное при участии Ю. В. Геронимуса и М. Ю. Цейтлина. Москва: ГИФМЛ, 1963. 1108 с.
21. Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Москва – Ленинград: ОГИЗ, 1948, 400 с.
22. Левин В. И. Сравнение интервальных чисел и оптимизация систем с интервальными параметрами. *Автоматика и телемеханика.*. 2004. № 4. С. 133–143.
23. Левин В. И. Упорядочение интервалов и оптимизация в задачах с интервальными параметрами. *Кибернетика и системный анализ.* 2004. № 3. С. 14–24.
24. Милн-Томсон Л. М., Комри Л. Дж. Четырехзначные математические таблицы. Москва: ФИЗМАТГИЗ, 1961. 245 с.
25. Янпольский А. Р. Гиперболические функции. Москва: НАУКА, 1960. 195 с.
26. Бессонов Л. А. Теоретические основы электротехники. Электрические цепи. Москва: Гардарика, 2002. 638 с.
27. Белькинд Л. Д. ЧАРЛЗ ПРОТЕУС ШТЕЙНМЕЦ. Москва: НАУКА, 1965. 222 с.
28. Данин Д. Избранное. Москва: Советский писатель, 1984. 608 с.
29. Савчук В. С., Романець О.А. Сприйняття науковим товариством нових наукових ідей і теорій (на прикладі становлення класичної електродинаміки. *Питання історії науки і техніки.* 2018, № 1. С. 23–30.
30. Веселовский О. Н., Шнейберг Я.А. Очерки истории электротехники. Москва: МЭИ, 1993. 252 с.
31. Сигорский В.П. Математический аппарат инженера. Киев: ТЕХНІКА, 1977. 764 с.
32. Фихтенгольц Г. М. Математика для инженеров. Часть первая. Москва – Ленинград: ГТТИ, 1931. 487 с.
33. Фихтенгольц Г. М. Математика для инженеров. Часть вторая. Москва – Ленинград: ГТТИ, 1933. 430 с.
34. Philip Alger. Mathematics for Science and Engineering. Based on «Engineering Mathematics». 1957. 372 p.
35. Ф. Клейнъ. Вопросы элементарной и высшей математики. Часть I. АРИѲМЕТИКА, АЛГЕБРА и АНАЛИЗЪ. Одесса: Изд. MATHESIS, 1912. 407 с.
36. ФЛОРІАНЪ КЭДЖОРИ. ИСТОРІЯ элементарной математики с указаніями на методы преподаванія. Переводъ съ англійскаго под редакціей съ примѣчаніями и прибавленіями И.Ю.Тимченко Приватъ – доцента Императорскаго Новороссійскаго университета. Одесса: Изд. MATHESIS, 1910. 368 с.
37. Пискунов В. И. Правовое положение приват-доцентов Российских Университетов. *Вестник Петербургского Свято–Тихоновского гуманитарного университета.* 2014. Вып. 4 (59). С. 98–116.
38. Шепельский И.В. Иван Юриевич ТИМЧЕНКО – Математик, механик, историк математики. URL: http://www.emomi.com/history/mechanics_odessa/university/timchenko.htm
39. Киселев А.П. Элементарная алгебра: для классической гимназий и 6-ти кл. реальных училищ. Москва: Типография. М. Г. Волчанинова, 1895. 302 с.
40. ЖОЗЕФЪ БЕРТРАНЪ, АЛГЕБРА для гимназій и реальных училищ Составилъ преимущественно по Бертрану и по другимъ Н.БИЛИБИНЪ, директора С.-Петербургскаго Перваго Реальнаго Училища. Изданіе И.И. Билибина.
41. А. П. Киселев: жизнь и деятельность в Воронежском крае. (Автор не указан). URL: http://www.microanswers.ru/article/a-p-kiselev-zhizn-i-dejatelnost-v-voronezhskom-krae.html
42. Шепелев Л.И. Титулы, мундиры, ордена в Российской империи. Ленинград: Наука, 1991. 224 с.
43. Цыпкин А. Г., Пинский А. И. Справочное пособие по методам решения задач по математике для средней школы. Москва: Наука, 1984. 416 с.
44. XÜTTE. Справочник для инженеров и студентов. Том первый. Издание пятнадцатое. Перевод с 26 немецкого издания. Москва-Ленинград: ОНТИ НКТП СССР, 1934. 1003 с.
45. XÜTTE. Справочник для инженеров и студентов. Том второй. Издание пятнадцатое. Перевод с 26 немецкого издания. Москва-Ленинград: ОНТИ НКТП СССР. 1936. 1184 с.
46. Зурков Д., Черепнев И. Служу Престолу и Отечеству. Москва: АСТ, 2018. 346 с.
47. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. 1. Санкт-Петербург: Мифрил, 1996. 416 с.
48. Д-ръ Адольфъ Томеленъ, инженеръ. Основы электротехники. Теоретическій и практическій курсъ электротехники. Перевод инж.-технолога Д. М. Вержбинскаго подъ редакціей П. Д. Войнаровскаго, профессора Электротехническаго института ИМПЕРАТОРА АЛЕКСАНДРА III. С. – Петербургъ. Изданіе А. Суворина. 623 с.

Received (Надійшла) 04.11.2021
Accepted for publication (Прийнята до друку) 12.01.2022

ABOUT THE AUTHORS / ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Гадецька Світлана Вікторівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент Харківського національного автомобільно-дорожнього університету, Харків, Україна;

Svitlana Gadetska – Candidate of Physics and Mathematics Sciences, Associate Professor, Senior Lecturer of Kharkiv National Automobile and Highway University, Kharkiv, Ukraine;
e-mail: svgadetska@ukr.net; ORCID ID: http://orcid.org/0000-0002-9125-2363.

Дубницький Валерій Юрійович – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, старший науковий співробітник ННІ "Каразінський банківський інститут" ХНУ ім. В.Н. Каразіна, Харків, Україна;
Valeriy Dubnitskiy – Candidate of Technical Sciences, Senior Research, Senior Research of "Karazin Banking Institute" of V.N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine;
e-mail: dubnitskiy@gmail.com; ORCID ID: http://orcid.org/0000-0003-1924-4104.

Кушнерук Юрій Іонович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри Харківського національного університету Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків, Україна;
Yuriy Kushneruk – Candidate of Technical Sciences Associate Professor, Senior Lecturer of Ivan Kozhedub ,Kharkiv National Air Force University,Kharkiv, Ukraine
e-mail: yuriy kushneruk@gmail.com; ORCID ID: http://orcid.org/0000-0001-5844-7137.

Ходирєв Олександр Іванович – – старший викладач ННІ "Каразінський банківський інститут" ХНУ ім. В.Н. Каразіна, Харків, Україна;
Alexander Khodyrev – Senior Instructor of "Karazin Banking Institute" of V.N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine;
e-mail: khodyrevmjk3758@gmail.com; ORCID ID: http://orcid.org/0000-0001-9871-9440.

Выполнение основных арифметических действий с комплексными числами, которые представлены в интервальной гиперболической форме

С. В. Гадецкая, В. Ю. Дубницкий, Ю. И. Кушнерук, А. И. Ходирев

Аннотация. **Цель работы.** Разработка способов выполнения основных арифметических действий с интервальными комплексными числами, которые представлены в гиперболической форме. **Результаты работы.** В работе рассмотрен метод расширения понятия интервальных чисел, определенных в гиперболической форме (гиперболических интервальных чисел), на поле комплексных чисел. Для этого действительную и мнимую часть комплексного числа представляют в виде гиперболического интервального числа. Установлены связи между представлением интервальных чисел в классической форме, системе ЦЕНТР-РАДИУС и гиперболической форме. Предложены методы выполнения основных арифметических действий с гиперболическими комплексными числами, а именно: сложением, вычитанием, умножением и делением. Предложен метод возведения в целую положительную степень комплексного интервального числа, определенного в гиперболической форме. Предложены методы вычисления модуля и аргумента комплексного числа, определенного в гиперболической форме. Предложен метод определения корня целочисленной степени n из интервального комплексного числа, представленного в гиперболической форме. Используя зависимости между гиперболическими и тригонометрическими функциями, предложены формы преобразования интервального числа, представленного в гиперболической форме в интервальное число, представленное в тригонометрической форме. Установлено, что наиболее целесообразно выполнять действия сложения и вычитания с комплексными интервальными числами, которые имеют классическую форму или определены в системе ЦЕНТР-РАДИУС. Установлено, что операции умножения, деление и возведения в целочисленную степень наиболее целесообразно выполнять с комплексными интервальными числами, определёнными в гиперболической форме. Операцию извлечения корня степени n из интервального комплексного числа, представленного в гиперболической форме наиболее целесообразно выполнять с совместным использованием представлений интервального числа в системе ЦЕНТР-РАДИУС и в гиперболической форме.

Ключевые слова: интервальные числа; гиперболическая форма интервального числа; комплексные интервальные числа; арифметические действия с гиперболическими комплексными интервальными числами.

Performance of basic arithmetic actions with complex numbers, which are presented in interval hyperbolic form

Svitlana Gadetska, Valeriy Dubnitskiy, Yuriy Kushneruk, Alexander Khodyrev

Abstract. **The goal of the work.** Development of methods for performing basic arithmetic operations with interval complex numbers, which are presented in hyperbolic form, their modulus and argument. **Results**. The paper considers the method of extending interval numbers defined in hyperbolic form (hyperbolic interval numbers) to the field of complex numbers. To do this, the real and imaginary part of a complex number is presented in the form of a hyperbolic interval number. The connections between the representation of interval numbers in the classical form, the CENTER-RADIUS system and the hyperbolic form are established. Methods of performing basic arithmetic operations with hyperbolic complex numbers are proposed, namely: addition, subtraction, multiplication and division. A method of raising the positive interval number of a complex interval number defined in a hyperbolic form to an integer positive degree is proposed. Methods for calculating the modulus and argument of a complex number defined in hyperbolic form are proposed. A method for determining the root of a degree from an interval complex number represented in hyperbolic form is proposed. Using the connections between hyperbolic and trigonometric functions, a form of representation of an interval number in trigonometric form is proposed. It is established that it is most expedient to perform addition and subtraction actions with complex interval numbers, which have a classical form or are defined in the CENTER-RADIUS system. The operations of multiplication, division and elevation to an integer power are most expedient to perform with complex interval numbers which are defined in hyperbolic form. The operation of calculating the root of a degree from an interval complex number, presented in hyperbolic form, is most expedient to perform with the combined use of the representation of the interval number in the system CENTER-RADIUS and in hyperbolic form.

Keywords: interval numbers, hyperbolic form of interval number; complex interval numbers; arithmetic operations with hyperbolic complex interval numbers.