УДК 517.977.55:517.928 **doi:** https://doi.org/10.20998/2522-9052.2022.1.06

Є. І. Калінін[1], Д. О. Лисиця[1], А. С. Нечаусов[2], Г. Я. Криховецький[3]

[1] Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», Харків, Україна
[2] Національний аерокосмічний університет імені М. Є. Жуковського «ХАІ», Харків, Україна
[3] Institute of Specialized Communication and Information Security, National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky KPI", Kyiv, Ukraine

# АСИМПТОТИКА СИСТЕМИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛІННЯ З ДВОМА МАЛИМИ СИНГУЛЯРНО-ЗБУРЮЮЧИМИ ПАРАМЕТРАМИ

**Анотація.** Предметом досліджень статті є динамічні системи управління з оптимальними повільними рухами. Метою роботи є отримання асимптотичного наближення управління в формі зворотного зв'язку, яке, не будучи рівномір-ним за областю визначення системи, формує рівномірно наближені до оптимальних повільні рухи системи. Завдання дослідження полягають у проведенні асимптотичного аналізу регулятору при малих значеннях параметрів. Застосовувані методи: методи мінімізації квадратичних функцій та методи матричної алгебри. Отримані результати: розглянуто задачу оптимального рівняння з двома малими сингулярно збуджуючими параметрами. Введені вимоги на характеристики та керованість обраної системи. Завдання, що розглядається, пов'язане, на відміну від відомих досліджень, з принциповою проблемою: при спрямуванні в нуль параметрів системи певні компоненти матриці, що задовольняє рівнянням Рікатті, в силу граничної умови для неї, набувають особливості в певних проміжках часу. Практична значущість роботи полягає у тому, що з використанням методів мінімізації отримані загальні методи побудови рівномірної області асимптотики систем оптимального управління з двома малими сингулярно-збурюючими параметрами за іншим малим параметром.

**Ключові слова:** оптимізація; рівномірна область асимптотики; стохастична динамічна система; простір параметрів, збурюючі параметри.

## Вступ

Завдання оптимального управління в якісному плані досліджені досить повно. Основні проблеми чисельного розв'язання зазначених завдань пов'язані з урахуванням фазових обмежень за наявності власних обмежень на керуючі впливи, і наявності деяких збурюючих параметрів [1, 2, 5].

В даний час у цій галузі є певний набір чисельних методів різного характеру та ступеня спільності. Як правило, у цих методах ігноруються або вважаються тривіальними зазначені особливості [1, 3, 8, 14]. При розв'язанні завдань з наявністю власних обмежень виділяють методи типу можливих напрямів, які суворо зберігають на кожному кроці ітераційного процесу загальні обмеження як на управління, так і на фазові змінні. При розв'язанні завдань з деякими збурюючими параметрами основні методи зводяться в наближенні області визначення системи до рівномірних значень.

У разі лінійної керованої системи дослідження завдання зазвичай проводиться у фазовому просторі кінцевих станів і метод розв'язку будується відносно відповідного завдання математичного програмування [4, 6, 7]. Кожне допоміжне завдання методу пов'язане з відшуканням сідлової точки для білінійної функції на прямому добутку множини досяжності та деякого багатогранника.

Окремо стоять завдання за принципами зворотного зв'язку [9 – 13]. Управління за принципом зворотного зв'язку є головним у теорії керування. Класична теорія регулювання, що базується на детермінованих моделях невисокого порядку, основну увагу приділяла зворотним зв'язкам за станом, що припускає можливість точного вимірювання всіх компонент поточного стану системи.

В сучасній теорії управління, що має справу і з невизначеними системами високого порядку, розглядаються найчастіше зворотні зв'язки за виходом. Вони працюють на інформації, яка постачається доступними недосконалими вимірювальними пристроями (сенсорами). В даний час найбільшого розвитку набула теорія оптимальних лінійних зворотних зв'язків по виходу для лінійно-квадратичних завдань зі стохастичною гаусовою невизначеністю [2]. Для систем з нестохастичною невизначеністю велика кількість робіт останніми роками присвячена побудові лінійних зворотних зв'язків за виходом методами $H_\infty$-теорії управління [3].

**Мета роботи** – отримання асимптотичного наближення управління в формі зворотного зв'язку, яке, не будучи рівномірним за областю визначення системи, формує рівномірно наближені до оптимальних повільні рухи системи.

Завдання дослідження полягають у проведенні асимптотичного аналізу регулятору при малих значеннях параметрів.

## Формування задачі оптимального керування

Розглянемо задачу оптимального рівняння з двома малими сингулярно збуджуючими параметрами. Необхідно мінімізувати квадратичний функціонал виду:

$$I(u) = \lambda_f^{-1} x'H'FHx\,|_{t=T} + \int_0^T (x'Dx + u'Ru)dt \qquad (1)$$

на траєкторіях системи

$$\begin{aligned} dy/dt &= A_1 x + A_2 y, \quad y|_{t=0} = y^0; \\ \lambda dz/dt &= A_3 x + A_4 y + B_z u, \quad z|_{t=0} = z^0, \end{aligned} \qquad (2)$$

заданої на фіксованому відрізку часу $0 \le t \le T$, де $\lambda > 0$ і $\lambda_f > 0$ – деякі малі параметри $y \in E^n$; $z \in E^m$; $x = col[y, z]$; $u \in E'$, а штрих означає транспортування.

Нехай на відрізку $0 \le t \le T$ виконуються наступні вимоги:

1. Матриці $D = D(t)$, $R = R(t)$, $A_i = A_i(t)$, $i = \overline{1,4}$ і $B_z = B_z(t)$ безперервно диференційовані; $D(t)$ та $R(t)$ – позитивно визначені; $H$ – постійна матриця блочного вигляду $H = [H_y 0]$, де $H_y$ – матриця $q \times n$ ($q \le n$); $F$ – позитивно визначена матриця розміру $q \times q$;

$$D = \begin{bmatrix} D_1 & D_2 \\ D_2 & D_3 \end{bmatrix},$$

де $D_1$ – блок, розмірність якого складає $n \times n$, $D_3$ – блок, розмірність якого $m \times m$; $D_3(t) \equiv 0$.

2. Система (2) цілком керована.

3. Усі власні числа матриці $A_4(t)$ лежать у лівій півплощині та:

$$rank[B_2(t), A_4(t)B_2(t), ..., A_4^{m-1}(t)B_2(t)] = m.$$

Позначимо:

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ \lambda^{-1}A_3 & \lambda^{-1}A_4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda^{-1}B_2 \end{bmatrix},$$

$$S = BR^{-1}B'.$$

За умов 1 та 2 оптимальне управління має вигляд:

$$u = -R^{-1}B'Px, \tag{3}$$

де $l \times l$ матриця $P(l = n + m)$ задовольняє рівняння Ріккаті:

$$dP/dt = -PA - A'P + PSP - D;$$

$$P|_{t=T} = \lambda_f^{-1}H'FH.$$

В роботах [3, 4] виконаний асимптотичний аналіз регулятора (3) окремо по кожному з параметрів $\lambda$ і $\lambda_f$, інший параметр вважався при цьому фіксованим, скажімо, рівним одиниці. Матриця $H$ була прийнята одиничною.

Вивчимо асимптотику системи (2), (3) за умови одночасно малих значень $\lambda$ і $\lambda_f$ та для прямокутної матриці $H$, що має разом із матрицями $D$ і $B$ частинний вигляд.

Завдання, що розглядається, пов'язане, проте, на відміну від [3, 4], з принциповою проблемою.

При спрямуванні $\lambda_f$ в нуль певні компоненти матриці $P$, в силу граничної умови для неї, набувають особливості при $t = T$.

Загальні методи побудови рівномірної області асимптотики таких систем за іншим малим параметром $\lambda$ нині відсутні.

Побудуємо вказану асимптотику нульового наближення. Підстановкою в рівняння Ріккаті легко переконатися, що:

$$P = K + W'(M + \lambda_f F^{-1})^{-1}W, \tag{4}$$

де матриці $K$, $W$ і $M$ задовольняють рівнянням виду:

$$dK/dt = -KA - A'K + KSK - D, \ K|_{t=T} = 0;$$

$$dW/dt = -W(A - SK), \ W|_{t=T} = H;$$

$$dM/dt = -WSW', \ M|_{t=T} = 0.$$

За аналогією з роботою [3] можна сказати, що вимога 2 еквівалентна умові $M > 0$ для всіх $0 \le t \le T$. Тому матриця $(M + \lambda_f F^{-1})^{-1}$ існує для всіх $0 \le t < T$, $\lambda_f \ge 0$ Матриці $K$ і $W$ розіб'ємо на блоки $\begin{bmatrix} K_1 & \lambda K_2 \\ \lambda K_2 & \lambda K_3 \end{bmatrix}$, $W = [W_y \lambda W_z]$ і перетворимо рівняння для $K$, $W$ і $M$ до вигляду:

$$\frac{dK_1}{dt} = -K_1A_1 - K_2A_3 - A_1'K_1 - A_3'K_2 + K_2S_2K_2' - D_1;$$

$$\frac{\lambda dK_2}{dt} = -K_1A_2 - K_2A_4 - \lambda A_1'K_2 - A_3'K_3 + + K_2S_zK_3 - D_2;$$

$$\frac{\lambda dK_3}{dt} = -K_2'A_2 - K_3A_4 - \lambda A_2'K_2 - A_4'K_3 + + K_3S_zK_3 - D_3;$$

$$\frac{dW_y}{dt} = -W_yA_1 - W_zA_{3k}, \ W_y|_{t=T} = H_y;$$

$$\frac{\lambda dW_z}{dt} = -W_yA_2 - W_zA_{4k}, \ W_z|_{t=T} = 0;$$

$$\frac{dM}{dt} = -W_zS_zW_z', \ M|_{t=T} = 0;$$

$$K_1|_{t=r} = 0; \quad K_2|_{t=T} = 0; \quad K_3|_{t=T} = 0,$$

де $S_z = B_zR^{-1}B_z'$; $A_{3k} = A_3 - S_zK_2'$;

$$A_{4k} = A_4 - S_zK_3.$$

Відповідно до роботи [2] у припущеннях 1…3 маємо асимптотичні розкладання:

$$K_1(t,\lambda) = K_{01}(t) + \lambda O_1(t,\lambda);$$

$$K_j(t,\lambda) = K_{0j}(t) + \Pi_0K_j(\tau) + \lambda O_{kj}(t,\lambda),$$

$$j = 2,3;$$

$$W_y(t,\lambda) = W_{0y}(t) + \lambda O_{wy}(t,\lambda);$$

$$W_z(t,\lambda) = W_{0z}(t) + \Pi_0W_z(\tau) + \lambda O_{wz}(t,\lambda);$$

$$M(t,\lambda) = M_0(t) + \lambda O_M(t,\lambda),$$

де $\tau = (t - T)/\lambda$, а величини виду $O(t,\lambda)$ обмежені при $0 \le t \le T$, $0 < \lambda \le \Delta$, $\Delta > 0$ – будь-яке фіксоване число. Головні члени підпорядковуються рівнянням:

$$0 = -K_{01}A_1 - K_{02}A_4 - D_2;$$

$$0 = -W_{0y}A_2 - W_{0z}A_4;$$

$$\frac{dK_{01}}{dt} = -K_{01}A_1 - K_{02}A_3 - A_1'K_{01} -$$

$$= A_3'K_{02} + K_{02}S_zK_{02}' - D, \ \ K_{01}|_{t=T} = 0;$$

$$\frac{d\Pi_0 K_2}{d\tau} = -\Pi_0 K_2 A_4(T), \ \ \Pi_0 K_2|_{\tau=0} = -K_{02}|_{t=T};$$

$$\frac{dW_{0y}}{dt} = -W_{0y}A_1 - W_{0z}A_{3k}, \ \ W_{0y}|_{t=T} = H_y;$$

$$\frac{d\Pi_0 W_z}{d\tau} = -\Pi_0 W_z A_4(T), \ \ \Pi_0 W_z|_{\tau=0} = -W_{0z}|_{t=T};$$

$$\frac{dM_0}{dt} = -W_{0z}S_zW_{0z}', \ \ M_0|_{t=T} = 0,$$

де $A_{3k} = A_3 - S_2K_{02}'$; при $D_3 \equiv 0$ $K_{03} = \Pi_0 K_3 \equiv 0$.

$$\tilde{K}_2 = K_{02} + \Pi_0 K_2 + \Pi_0 K_2;$$

$$\tilde{W}_z = W_{0z} + \Pi_0 W_z;$$

Позначимо $\tilde{K} = \begin{bmatrix} K_{01} & \lambda\tilde{K}_2 \\ \lambda\tilde{K}_2 & 0 \end{bmatrix};$

$$\tilde{W} = [W_{0y}\lambda\tilde{W}_z].$$

Запишемо нову систему з наближеним регулятором виду:

$$\frac{d\eta}{dt} = A_1\eta + A_2\xi, \ \ \eta|_{t=0} = y^0;$$

$$\frac{\lambda d\xi}{dt} = A_3\eta + A_4\xi + B_z\tilde{u}, \ \ \xi|_{t=0} = z^0; \qquad (5)$$

$$\tilde{u} = -R^{-1}B'\tilde{P}\xi; \qquad (6)$$

$$\tilde{P} = \tilde{K} + \tilde{W}(M_0 + \lambda_f F^{-1})^{-1}\tilde{W}, \qquad (7)$$

де $\eta \in E^n$; $\xi \in E^m$; $\xi = col[\eta, \zeta]$; зворотна матриця (7) існує для всіх $0 \le t \le T$, $\lambda_f > 0$ в силу $F > 0$ та $R > 0$.

Зазначимо, що матриця $\tilde{P}$ не дає рівномірного асимптотичного наближення для матриці $P$ на жодному з проміжків $t_0 \le t \le T$ при $\lambda \to 0$, $\lambda_f \to 0$, де $0 \le t_0 \le T$. Більше того, для будь-якого $\lambda > 0$ і будь-якого досить малого $\lambda_f > 0$ знайдуться такі $t$ (близькі до $T$) що норма різниці $\| P - \tilde{P} \|$ буде більше будь-якого великого наперед заданого числа.

Сформуємо твердження, що при виконанні умов 1…3 та додаткової вимоги позитивної визначеності матриці $L = H_y A_2 A_4^{-1} B_z R^{-1} \times [H_y A_2 A_4^{-1} B_z]'|_{t=T}$ (обчисленої при $t = T$) відхилення траєкторій оптимальної (2) – (4) та наближеної (5) – (7) систем підпорядковуються оцінкам виду:

$$\| y(t,\lambda,\lambda_f) - \eta(t,\lambda,\lambda_f) \| \le C\left\{\lambda^\delta \exp\left[\wp(t-T)/\lambda^\delta\right] + \lambda\right\};$$

$$\| z(t,\lambda,\lambda_f) - \xi(t,\lambda,\lambda_f) \| \le C\left\{\exp\left[\wp(t-T)/\lambda^\delta\right] + \lambda\right\};$$

$$\| u(t,\lambda,\lambda_f) - \tilde{u}(t,\lambda,\lambda_f) \| \le C\left\{\exp\left[\wp(t-T)/\lambda\right] + \lambda\right\};$$

де $C > 0$ і $\wp > 0$ – деякі постійні, що не залежать від $t$, $\lambda$ і $\lambda_f$ при $0 \le t \le T$; $0 < \lambda \le \Delta$; $0 < \lambda_f \le \Delta$; $0 < \delta < 1$ і $\Delta > 0$ – будь-які фіксовані числа.

Наведемо короткий виклад доказу твердження. Нехай

$$f = (M + \lambda_f F^{-1})^{-1}(W_y y + \lambda W_z z), \ \ f^0 = f|_{t=0};$$

$$\varphi = (M_0 + \lambda_f F^{-1})^{-1}(W_{0y}\eta + \lambda\tilde{W}_z\xi), \ \ \varphi^0 = \varphi|_{t=0};$$

$$h = \lambda^{-1}(M_0 + \lambda_f F^{-1})^{-1}(\varphi - \varphi^0).$$

Неважко перевірити, що $df/dt \equiv 0$, $f \equiv f^0$ та вивести рівняння:

$$\frac{d\Delta y}{dt} = A_1\Delta y + A_2\Delta z, \ \ \Delta y|_{t=0} = 0;$$

$$\frac{\lambda d\Delta z}{dt} = A_{3\tilde{k}}\Delta y + A_4\Delta z + A_h h + \lambda O_1, \ \ \Delta z|_{t=0} = 0; \qquad (8)$$

$$\frac{\lambda dh}{dt} = -\Pi_\eta \Delta y - (\Pi\xi + \lambda O\xi)\Delta z - S_h h +$$

$$+ \Pi_h + \lambda O_2, \ \ h|_{t=0} = 0,$$

$$\Delta y = y - \eta; \quad \Delta z = z - \xi;$$

$$A_{3\tilde{k}} = A_3 - S_z\tilde{K}_2';$$

$$S_h = \tilde{W}_z A_h;$$

$$A_h = \lambda S_z \tilde{W}_z' \times (M_0 + \lambda_f F^{-1});$$

$$\Pi_\eta = \Pi_0 W_\xi A_{3\tilde{k}} - \tilde{W}_z S_z \Pi_0 K_2;$$

$$\Pi_\xi = \Pi_0 W_z [A_4 - A_4(T)];$$

де

$$O_\xi = \left(W_{0y}A_1 + W_{0z}A_{3\tilde{k}}\right)A_2A_4^{-1} -$$

$$-W_{0y}\frac{d}{dt}\left(A_2A_4^{-1}\right);$$

$$\lambda O_1 = -S_z(W_z' f^0 - \tilde{W}_z'\varphi^0) +$$

$$+ A_{3k} - A_{3\tilde{k}} + A_{4k} - A_4;$$

$$O_2 = O\xi z;$$

$$\Pi_h = \Pi_{\eta y} + \Pi\xi z + \Pi w\varphi^0.$$

Маємо, що розв'язок $x = col[y, z]$ рівнянь (2), (3) обмежений при $0 \le t \le T$, $0 < \lambda \le \Delta$, $0 < \lambda_f \le \Delta$. Для доказу достатньо записати для векторів $x$ і $V = Px = col[a, \lambda b]$, $a \in E^n$, $b \in E^m$ систему диференціальних рівнянь з умовами $y|_{t=0} = y^0$, $z|_{t=0} = z^0$, $a|_{t=0} = a^0(\lambda, \lambda_f)$, $b|_{t=0} = 0$ та застосувати теорему [2]. Тоді згідно з цією роботою на тій же області $t$, $\lambda$ і $\lambda_f$:

$$\| \Pi_{\eta,\zeta,h,W}(t,\lambda,\lambda_f) \| \le C\exp(\wp\,\tau);$$

$$\| O_{1,2,\zeta}(t,\lambda,\lambda_f) \| \le C.$$

При $0 \le t \le T$, $0 < \lambda \le \Delta$ справедлива оцінка

$$\| \tilde{W}_z(t,\lambda) \| \le C\lambda^{-1}(T - t), \qquad (9)$$

що встановлюється за допомогою теореми Лангража про середнє значення, яка застосовується до різниці $\tilde{W}_z(t,\lambda)-\tilde{W}_z(T,\lambda)$, враховуючи, що $\tilde{W}_z(t,\lambda)=0$, а матриця $A_4(t)$ – матриця Гурвіца.

З розкладання у ряд Тейлора $M_0(t)=(T-t)L+(T-t)^2O(1)$, $t\to T$ та умов $L>0$, $R>0$ легко отримати, що $M_0(t)>0$ для $0\le t<T$, а при $0\le t\le T$, $\lambda_f>0$:

$$\|(M_0(t)+\lambda_f F^{-1})^{-1}\le C(T-t)^{-1}. \tag{10}$$

На підставі оцінок (9) і (10) знаходимо при $0\le t\le T_h$, $0<\lambda\le\Delta$, $0<\lambda_f\le\Delta$:

$$\begin{gathered}\|A_h(t,\lambda,\lambda_f)\|\le C\min\left\{1;\lambda(T-t)^{-1}\right\};\\ \|S_h(t,\lambda,\lambda_f)\|\le C.\end{gathered} \tag{11}$$

Проаналізуємо вагові матриці, які пов’язані із системою (8). Маємо для вагової матриці $G_h(t,\theta,\lambda,\lambda_f)$ третього рівняння (8):

$$\begin{gathered}\frac{dG_h}{dt}=-\lambda^{-1}S_hG_h;\\ G_h|_{t=0}=E_q;\quad 0\le\theta\le t\le T,\end{gathered} \tag{12}$$

де $E_q$ – одинична матриця $q\times q$.

Покажемо, що $\|G_h\|\le C$ при $0\le\theta\le t\le T$, $0<\lambda\le\Delta$, $0<\lambda\le\Delta$. Нехай спочатку $0\le\theta\le t\le T-\lambda$. Рівняння (12) можна переписати в еквівалентній інтегральній формі:

$$\begin{gathered}G_h(t,\theta,\lambda,\lambda_f)=G_0(t,\theta,\lambda_f)-\\ -\int_\theta^t G_0(t,p,\lambda_f)\frac{1}{\lambda}\Pi_s(p,\lambda,\lambda_f)dp,\end{gathered}$$

де $G_0$ – розв’язок рівняння

$$\frac{dG_0}{dt}=-\lambda^{-1}S_0G_0,\ \ G_0|_{t=0}=E_q,\ \ 0\le\theta\le t\le T-\lambda;$$

$$\Pi_s=S_h-S_0;$$

$$S_0=\lambda W_{0z}S_zW_{0z}'(M_0+\lambda_f F^{-1})^{-1}.$$

Легко переконатися, що

$$G_0=[M_0(t)+\lambda_f F^{-1}][M_0(\theta)+\lambda_f F^{-1}]^{-1}.$$

Отже, $\|G_0\|$ обмежена. В силу (9) та (10) $\|\Pi_s(t,\lambda,\lambda_f)\|\le C\exp(\wp\tau)$ на виділеній області. Застосовуючи метод послідовних наближень $G_h^0=G_0, G_h^n=G_0-\int_\theta^t G_0\frac{1}{\lambda}\Pi_sG_h^{n-1}dp$, $n=1,2,\ldots$, знаходимо, що $\|G_h\|\le C$ на виділеній області.

На решті області визначення обмеженість $\|G_h\|$ очевидна, оскільки довжина проміжку інтегрування рівняння (12) у цьому разі не перевищує $\lambda$, $\|\lambda_f^{-1}S_h\|\le C\lambda^{-1}$, $\|G_h|_{t=0}\|\le C$. Твердження доведено.

Оцінимо вагову матрицю $\varGamma(t,\theta,\lambda)$ перших двох рівнянь (8). Рівняння для неї має вигляд:

$$\begin{gathered}\frac{d\varGamma}{dt}=\frac{1}{\lambda}\begin{bmatrix}\lambda A_1 & \lambda A_2\\ A_{3\tilde{k}} & A_4\end{bmatrix}\varGamma,\\ \varGamma|_{t=\theta}=E_l;\quad 0\le\theta\le t\le T,\end{gathered} \tag{13}$$

де $E_l$ – одинична матриця $l\times l$. Покажемо, що для блочного представлення $\varGamma=\begin{bmatrix}\varGamma_1 & \varGamma_3\\ \varGamma_2 & \varGamma_4\end{bmatrix}$ виконуються оцінки:

$$\begin{gathered}\|\varGamma_{1,2}\|\le C;\quad \|\varGamma_3\|\le C\lambda;\\ \|\varGamma_4\|\le C\{\exp[\wp(\theta-t)/\lambda]+\lambda\},\end{gathered}$$

при $0\le\theta\le t\le T$, $0<\lambda\le\Delta$. Перепишемо рівняння для $\varGamma$ в інтегральній формі:

$$\begin{gathered}\varGamma(t,\theta,\lambda)=G(t,\theta,\lambda)+\\ +\frac{1}{\lambda}\int_\theta^l G(t,p,\lambda)\begin{bmatrix}0 & 0\\ \Pi_3(p) & 0\end{bmatrix}\varGamma(p,\theta,\lambda)dp,\end{gathered} \tag{14}$$

де $G=\begin{bmatrix}G_1 & G_3\\ G_2 & G_4\end{bmatrix}$ – блокова матриця, що задовольняє рівняння виду (13), в якому $A_{3\tilde{k}}$ замінена на $A_{3\bar{k}}$; $\Pi_3=A_{3\tilde{k}}-A_{3\bar{k}}$.

На підставі теореми з роботи [2] маємо:

$$\begin{gathered}\|G_{1,2}\|\le C;\quad \|G_3\|\le C\lambda;\\ \|G_4\|\le C\exp[\wp(\theta-t)/\lambda],\end{gathered}$$

при $0\le\theta\le t\le T$, $0<\lambda\le\Delta$. Застосовуючи далі метод послідовних наближень до рівняння (14), неважко встановити приведені оцінки для $\varGamma_i$, $i=\overline{1,4}$.

Спираючись на отримані оцінки, аналогічно можна проаналізувати поведінку вагової матриці всієї системи (8) $G_\Delta(t,\theta,\lambda,\lambda_f)$, яка задовольняє рівнянню при $0\le\theta\le t\le T$:

$$\frac{dG_\Delta}{dt}=\frac{1}{\lambda}\begin{bmatrix}\lambda A_1 & \lambda A_2 & 0\\ A_{3\tilde{k}} & A_4 & A_h\\ -\Pi_\eta & -\Pi_\xi & -S_h\end{bmatrix}G_h,\ \ G_h|_{t=\theta}=E_{n+m+q},$$

де $E_{n+m+q}$ – одинична матриця розміром $(n+m+q)$, з урахуванням, що стовпці матриці $G_\Delta$ з номерами від $n+1$ до $n+m+q$ обмежені при $0\le\theta\le t\le T$, $0<\lambda\le\Delta$, $0<\lambda_f\le\Delta$.

## Висновки

Перейдемо до аналізу розв’язків системи (8). Використовуючи оцінки для $G_\Delta$ легко довести спочатку обмеженість величин $\Delta y$, $\Delta z$ і $h$ на області $0\le t\le T$, $0<\lambda\le\Delta$, $0<\lambda_f\le\Delta$.

Для цього достатньо записати (8) у формі:

$$col\,|\,\Delta y(t,\lambda,\lambda_f),\Delta z(t,\lambda,\lambda_f),h(t,\lambda,\lambda_f)\,|=$$

$$=\int_{\theta}^{t} G\Delta(t,\theta,\lambda,\lambda_f)\cdot col\,|\,0,O_1(\theta),-O_{\zeta}(\theta)\Delta z\left(\theta,\lambda,\lambda_f\right)+$$

$$+\lambda^{-1}\Pi_h(\theta)+O_2(\theta)\,|\,d\theta$$

і застосувати спосіб послідовних наближень.

Для отримання остаточних оцінок $\Delta y$, $\Delta z$ і $\Delta u$ скористаємося першими двома рівняннями (8), записавши їх у формі:

$$\begin{bmatrix}\Delta y(t,\lambda,\lambda_f)\\ \Delta z(t,\lambda,\lambda_f)\end{bmatrix}=\frac{1}{\lambda}\int_0^l\begin{bmatrix}\Gamma_1(t,\theta,\lambda_f) & \Gamma_3(t,\theta,\lambda_f)\\ \Gamma_2(t,\theta,\lambda_f) & \Gamma_4(t,\theta,\lambda_f)\end{bmatrix}\times$$

$$\times\begin{bmatrix}0\\ A_h(\theta)h(\theta,\lambda,\lambda_f)+\lambda O_1(\theta)\end{bmatrix}d\theta.$$

Нехай $0<\delta<1$ – будь-яке фіксоване число. Тоді за допомогою (11) легко знайти при $0\le t\le T$, $0<\lambda\le\Delta$, $0<\lambda_f\le\Delta$:

$$\|\Delta y\|\le C\left[\lambda+\int_0^{T-\lambda^{\delta}}\|A_h\|\,d\theta+\int_{T-\lambda^{\delta}}^{l}\|A_h\|\,d\theta\right]\le C\lambda^{\delta}.$$

Очевидно також, що $\|\Delta y\|\le C\lambda$ для $0\le t\le t_0$, $0<\lambda\le\Delta$, $0<\lambda\le\Delta$, де $t_0<T$.

Підсумовуючи ці оцінки, переконуємось у справедливості твердження щодо величини $\Delta y$.

Аналогічно отримуємо оцінки для $\Delta z$ і, використовуючи (3), (6), (9) та (10), для $\Delta u$. Твердження доведено. Зауважимо, що справедливість твердження збережеться, якщо умову $D_3\equiv 0$ замінити умовою $D_3=\lambda d_3(t)$.

## Список літератури


1. Dorf R.C. and Bishop R.H. (2011) *Modern control system*, 12th Edition, Prentice Hall
2. Denisova L.A. and Meshcheryakov V.A. (2015) “Automatic parametric synthesis of a control system using the genetic algorithm”, *Automation and Remote Control*, 76(1), pp. 149-156, DOI: https://doi.org/10.1134/S0005117915010142
3. Denisova L.A. and Meshcheryakov V.A. (2016) “Synthesis of a control system using the genetic algorithms”, *IFAC-PapersOnLine*, 49(12), pp. 156-161, DOI: https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2016.07.567
4. Макаров И.М., Лохин В.М. (2001) *Интеллектуальные системы автоматического управления*. Физматлит
5. Xue D. and Chen Y.Q. (2013) *System simulation techniques with MATLAB and Simulink*, Chichester: UK, John Wiley & Sons.
6. Purohit G.N., Sherry A.M. and Saraswat M. (2013) “Optimization of function by using a new MATLAB based genetic algorithm procedure”, *International Journal of Computer Applications*, 61(15), pp. 1-5.
7. Deb K. (2001) *Multi-objective optimization using evolutionary algorithms*, Chichester: UK, John Wiley & Sons.
8. Goldberg D.E. (1994) *Genetic Learning in optimization, search and machine learning*. Addisson Wesley.
9. Deb K., Pratap A., Agarwal S. and Meyarivan T. (2002) “A Fast and Elitist Multi-objective Genetic Algorithm: NSGA-II”, *IEEE transactions on Evolutionary Computation*, 6(2), pp. 182-197, DOI: https://doi.org/10.1109/4235.996017
10. Jadaan O., Rao C.R., Rajamani L. (2008) “Non-dominated ranked genetic algorithm for solving multi-objective optimization problem: NRGA”, *Journal of Theoretical and Applied Information Technology*, pp. 60-67
11. Van Veldhuizen D.A. & Lamont G.B. (2000). “Multiobjective optimization with messy genetic algorithms”, *In Proceedings of the 2000 Symposium on Applied Computing*, pp. 470-476, DOI: https://doi.org/10.1145/335603.335914
12. Sirinaovakul B. & Thajchayapong, P. (1994). “A knowledge base to assist a heuristic search approach to facility layout”, *International Journal of Production Research*, 32, pp. 141-160, DOI: https://doi.org/10.1080/00207549408956921
13. Ye M. & Zhou G. (2007). “A local genetic approach to multiobjective, facility layout problems with fixed aisles”. *International Journal of Production Research*, 45, pp. 5243-5264, DOI: https://doi.org/10.1080/00207540600818179
14. Scholz D., Jaehn F., & Junker A. (2010). “Extensions to STaTS for practical applications of the facility layout problem”, *European Journal of Operational Research*, 204, pp. 463-472, DOI: http://doi.org/10.1016%2Fj.ejor.2009.11.012


## References


1. Dorf R.C. and Bishop R.H. (2011) *Modern control system*, 12th Edition, Prentice Hall
2. Denisova L.A. and Meshcheryakov V.A. (2015) “Automatic parametric synthesis of a control system using the genetic algorithm”, *Automation and Remote Control*, 76(1), pp. 149-156, DOI: https://doi.org/10.1134/S0005117915010142
3. Denisova L.A. and Meshcheryakov V.A. (2016) “Synthesis of a control system using the genetic algorithms”, *IFAC-PapersOnLine*, 49(12), pp. 156-161, DOI: https://doi.org/10.1016/j.ifacol.2016.07.567
4. Makarov I.M. and Lohin V.M. (2001) *Intelligent automatic control systems*. Fizmatlit
5. Xue D. and Chen Y.Q. (2013) *System simulation techniques with MATLAB and Simulink*, Chichester: UK, John Wiley & Sons.
6. Purohit G.N., Sherry A.M. and Saraswat M. (2013) “Optimization of function by using a new MATLAB based genetic algorithm procedure”, *International Journal of Computer Applications*, 61(15), pp. 1-5.
7. Deb K. (2001) *Multi-objective optimization using evolutionary algorithms*, Chichester: UK, John Wiley & Sons.
8. Goldberg D.E. (1994) *Genetic Learning in optimization, search and machine learning*. Addisson Wesley.
9. Deb K., Pratap A., Agarwal S. and Meyarivan T. (2002) “A Fast and Elitist Multi-objective Genetic Algorithm: NSGA-II”, *IEEE transactions on Evolutionary Computation*, 6(2), pp. 182-197, DOI: https://doi.org/10.1109/4235.996017
10. Jadaan O., Rao C.R., Rajamani L. (2008) “Non-dominated ranked genetic algorithm for solving multi-objective optimization problem: NRGA”, *Journal of Theoretical and Applied Information Technology*, pp. 60-67
11. Van Veldhuizen D.A. & Lamont G.B. (2000). “Multiobjective optimization with messy genetic algorithms”, *In Proceedings of the 2000 Symposium on Applied Computing*, pp. 470-476, DOI: https://doi.org/10.1145/335603.335914

12. Sirinaovakul B. & Thajchayapong, P. (1994). "A knowledge base to assist a heuristic search approach to facility layout", *International Journal of Production Research*, 32, pp. 141-160, DOI: https://doi.org/10.1080/00207549408956921
13. Ye M. & Zhou G. (2007). "A local genetic approach to multiobjective, facility layout problems with fixed aisles". *International Journal of Production Research*, 45, pp. 5243-5264, DOI: https://doi.org/10.1080/00207540600818179
14. Scholz D., Jaehn F., & Junker A. (2010). "Extensions to STaTS for practical applications of the facility layout problem", *European Journal of Operational Research*, 204, pp. 463-472, DOI: http://doi.org/10.1016%2Fj.ejor.2009.11.012


Received (Надійшла) 26.10.2022
Accepted for publication (Прийнята до друку) 19.01.2022

ABOUT THE AUTHORS / ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

**Калінін Євген Іванович** – доктор технічних наук, професор, професор кафедри комп'ютерної інженерії та програмування, Харківський національний університет «Харківський політехнічний інститут», Харків, Україна;
**Yevhen Kalinin** – Doctor of Technical Sciences, Professor, Professor of Computer Engineering and Programming Department, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv, Ukraine;
e-mail: kalinin.kpi.kharkov.ua@gmail.com; ORCID ID: https://orcid.org/0000-0001-6191-8446.

**Лисиця Дмитро Олександрович –** кандидат технічних наук, старший викладач кафедри обчислювальної техніки та програмування, Національний технічний університет **«**Харківський політехнічний інститут**»,** Харків, Україна;
**Dmytro Lysytsia**– Candidate of Engineering Sciences, Senior Lecturer of Computer Engineering and Programming Department, National Technical University «Kharkiv Polytechnic Institute», Kharkiv, Ukraine;
e-mail: lysytsia-mail@ukr.net; ORCID ID: https://orcid.org/0000-0003-1778-4676.

**Нечаусов Артем Сергійович –** кандидат технічних наук, доцент геоінформаціійних технологій та космічного моніторингу Землі, Національний аерокосмічний університет імені М.Є. Жуковського «ХАІ», Харків, Україна;
**Artem Nechausov** – Candidate of Engineering Sciences, Associate Professor of Geoinformation Technologies and Space Monitoring of the Earth, National Aerospace University named after M.Y. Zhukovsky "KhAI", Kharkiv, Ukraine;
e-mail: a.nechausov@khail.edu; ORCID ID: https://orcid.org/0000-0001-7216-5566.

**Криховецький Георгій Яремович** – кандидат технічних наук, ст. наук. співр., завідувач кафедри, Інститут спеціального зв'язку та захисту інформації Національного технічного університету України "КПІ ім. І. Сікорського", Київ, Україна;
**Heorhii Krykhovetskyi** – Candidate of Technical Sciences, Senior Researcher, Head of Department, Institute of Specialized Communication and Information Security, National Technical University of Ukraine "Igor Sikorsky KPI", Kyiv, Ukraine;
e-mail: kgeorg@ukr.net; ORCID ID: http://orcid.org/0000-0002- 1771-6211.

### Асимптотика системы оптимального управления с двумя малыми сингулярно-возбуждающими параметрами

Е. И. Калинин, Д. А. Лисица, А. С. Нечаусов, Г. Я. Крыховецкий

**Аннотация. Предметом исследований** статьи являются динамические системы управления с оптимальными медленными движениями. **Целью работы** является получение асимптотического приближения управления в форме обратной связи, которое, не являясь равномерным по области определения системы, формирует равномерно приближенные к оптимальным медленные движения системы. Задачи исследования заключаются в проведении асимптотического анализа регулятора при малых значениях параметров. **Применяемые методы:** методы минимизации квадратических функций и методы матричной алгебры. **Полученные результаты:** рассмотрена задача оптимального уравнения с двумя малыми сингулярно возбуждающими параметрами. Введены требования на характеристики и управляемость выбранной системы. Рассматриваемая задача связана, в отличие от известных исследований, с принципиальной проблемой: при стремлении к нулю параметров системы определенные компоненты матрицы, удовлетворяющей уравнению Рикатти, в силу предельного условия для нее, приобретают особенности в определенных промежутках времени. **Практическая значимость работы** состоит в том, что с использованием методов минимизации получены общие методы построения равномерной области асимптотики систем оптимального управления с двумя малыми сингулярно-возбуждающими параметрами по другому малому параметру.

**Ключевые слова:** оптимизация; равномерная область асимптотики; стохастическая динамическая система; пространство параметров, возмущающие параметры.

### Asymptotic behavior of an optimal control system with two small singularly excitatory parameters

Yevhen Kalinin, Dmytro Lysytsia, Artem Nechausov, Heorhii Krykhovetskyi

**Annotation. The subject of research** in the article is dynamic control systems with optimal slow motions. **The goal** of the work is to obtain an asymptotic approximation of the control in the form of feedback, which, not being uniform in the domain of the system definition, forms slow motions of the system uniformly close to optimal ones. The objectives of the study are to conduct an asymptotic analysis of the controller for small values of the parameters. **Applied methods:** methods of minimization of quadratic functions and methods of matrix algebra. **The obtained results**: the problem of the optimal equation with two small singularly exciting parameters is considered. Requirements for the characteristics and controllability of the selected system have been introduced. The problem under consideration, in contrast to well-known studies, is connected with a fundamental problem: as the system parameters tend to zero, certain components of the matrix that satisfies the Ricatti equation, due to the limiting condition for it, acquire singularities in certain time intervals. **The practical significance of the work** lies in the fact that with the use of minimization methods, general methods are obtained for constructing a uniform region of asymptotics for optimal control systems with two small singular-exciting parameters with respect to another small parameter.

**Keywords:** optimization; uniform region of asymptotics; stochastic dynamic system; parameter space, perturbing parameters.