Information systems research

УДК 530.17:519.876 **doi: 10.20998/2522-9052.2019.3.08**

В. Ю. Дубницкий[1], А. М. Кобылин[1], О. А. Кобылин [2]

[1] Харьковский учебно-научный институт ГВУЗ Университета банковского дела, Харьков, Украина
[2] Харьковский национальный университет радиоэлектроники, Харьков, Украина

ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНДИКАТОРОВ ПОДОБИЯ И ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ КРИТЕРИЕВ ПОДОБИЯ, ИНТЕРВАЛЬНО ОПРЕДЕЛЁННЫХ В СИСТЕМЕ ЦЕНТР – РАДИУС

Аннотация. Цель работы состоит в разработке методов вычисления и численного интегрирования критериев и индикаторов подобия, аргументами которых служат интервальные числа, заданные в системе центр – радиус. **Результаты.** Описано применение интервальных вычислений в системе центр-радиус для определения значений критериев и индикаторов подобия. Предложена методика численного интегрирования таблично заданной подынтегральной функции с произвольным расположением узлов интегрирования при условии, что исходные данные представлены в виде интервальных чисел, определённых в системе центр – радиус. Приведен численный пример, иллюстрирующий полученные результаты. Показано, что вычисление критериев и индикаторов подобия и функций от них без учёта их возможных интервалов определения может приводить к ошибочным выводам о результатах моделирования.

Ключевые слова: теория подобия и размерностей; критерии подобия; индикаторы подобия; интервальные вычисления; численное интегрирование таблично заданных функций с произвольно расположенными узлами.

Введение

В рамках данной работы будем рассматривать только физически реализуемые системы, то есть такие, которые представлены совокупностью физических элементов, структурно связанных между собой и взаимодействующих с внешней средой. В начальной стадии проектирования таких систем их физическое моделирование на основе теории подобия служит весьма полезным источником сведений об их свойствах. В работе [1, С. 394] сказано, что эта теория изучает условия подобия физических процессов. Два физических процесса называют подобными, если они подчинены одним и тем же физическим законам. Каждую количественную характеристику одного их них получают из другого путём умножения её на постоянную величину. Эту величину называют константой подобия, и она одинакова для всех однородных величин, участвующих в изучаемом процессе. В соответствии с основным постулатом теории подобия два явления подобны тогда и только тогда, когда они качественно одинаковы и имеют равные значения некоторых безразмерных параметров, называемых критериями подобия. Не следует думать, что модель – это нечто небольшое по размерам. Модели инженерных объектов могут быть весьма сложными изделиями, создание которых может быть самостоятельной научно – технической задачей. Например, известно, что для подготовки к полномасштабным летным испытаниям самолёта ТУ- 144 была построена его аэродинамическая модель – самолёт МиГ – 21И [24], модель ледяного «непотопляемого авианосца» «Habakkuk» выполненная в масштабе 1:50 весила 1100 т. [25]. Критерии подобия должны быть составлены из физических и геометрических величин, характеризующих изучаемое явление. Основные положения теории подобия и размерности изложены в ставших классическими работах [2, 3]. Следует отметить, что работа [2] – это переиздание вышедшего в 1934 г. в русском переводе лекций, прочитанных будущим нобелевским лауреатом по физике П. Бриджменом в 1920 г. В соответствии с этими работами далее будем использовать следующие определения:

1. Системой единиц принято называть единицы измерения различных физических единиц, объединённых на основе их непротиворечивости. Формулу, указывающая зависимость единицы измерения от величин, принятых в качестве основных называют размерностью этой величины. Размерность величины указывают символом, заключённым в квадратную скобку. Например, размерность скорости:

$$[v]=[L]\cdot[T]^{-1}, \tag{1}$$

где $[L]$, $[T]$ размерности длины и времени. Здесь и далее будет использоваться система СИ.

2. Выражение единиц измерения произвольной физической величины с использованием единиц измерения величин, принятых за основные, называется размерностью этой величины.

3. Размерность любой физической величины может быть только произведением возведенных в степень величин, принятых за основные величины.

4. Размерности обеих частей равенства, выражающего некоторую физическую закономерность, должны быть одинаковы.

5. Безразмерные произведения различных степеней называются критериями подобия; их обычно обозначают как П = idem.

В данной работе будут рассмотрены некоторые особенности процессов, связанных с определением численных значений критериев подобия. В работе [4] предложено рассматривать критерии подобия как группы растяжений. Для этого физически измеряемую величину представим в виде:

$$X = \langle X \rangle \dim X , \qquad (2)$$

где $\langle X \rangle$ – её численное значение, $\dim X$ – её физическая размерность. Пусть $E_\alpha \left(\alpha = 1, 2, ...m \right)$ - множество некоторых физически независимых единиц измерения. Способ их выбора описан в работах [2, 3]. Физическую величину X называют определённой в системе единиц $E_\alpha = E(1), E(2), ...E(m)$ если:

$$X = \langle X \rangle \dim X = \\ = \langle X \rangle \prod_{i=1}^{m} E_i^{\alpha(i)} = \langle X \rangle X_1^{\alpha(1)} X_2^{\alpha(2)} ... X_m^{\alpha(m)}. \qquad (3)$$

В условии (3) раскрыт подробно символ произведения в связи с требованиями к записи формул размерности принятыми в теории подобия.

Основополагающая теорема анализа размерностей утверждает, что если имеется физически значимое выражение, включающее в себя *n* физических переменных, и эти переменные описываются при помощи *m* независимых фундаментальных физических величин, то исходное выражение эквивалентно выражению, включающему множество из *p = n - k* безразмерных величин, построенных из исходных переменных. Это позволяет вычислять множество безразмерных величин по данным физическим значениям, даже если неизвестно выражение, связывающее эти значения. В работе [4] рассмотрен случай перехода от одних независимых единиц измерения $E_\alpha \left(\alpha = 1, 2, ...m \right)$ к другим, полученным путем изменения масштаба, т. е. преобразования вида:

$$E_\alpha = a^\alpha E_\alpha{}' \left(\alpha = 1, 2, ...m \right) \qquad (4)$$

приведет к изменению числового значения величины X в соответствии со следующей цепочкой равенств:

$$\langle X \rangle \dim X = \langle X \rangle \left(a^{(1)} \right)^{\lambda(1)} ... \left(a^m \right)^{\lambda(m)} E_1{}'^{\lambda(1)} ... \\ \cdots E_1{}'^{\lambda(m)} = \langle X \rangle \prod_{i=1}^{m} \left(a^\alpha \right)^{\lambda(\alpha)} = \langle X \rangle' \dim X'. \qquad (5)$$

Со ссылкой на работу [5] утверждается, что такое преобразование есть групповое преобразование, принадлежащее группе преобразований H^m. В работе [6] приведен пример использование выражений (4, 5) для определения численного значения критерия подобия π. Примем, без ограничения общности, что нами использована система единиц *L, M, T.* Используя правила, изложенные в работах [2,3] получим, что любой критерий подобия в этой системе примет вид:

$$\pi = c \left[L^{\lambda(1)} M^{\mu(1)} T^{\tau(1)} \right]^{z(1)} \left[L^{\lambda(2)} M^{\mu(2)} T^{\tau(2)} \right]^{z(2)} ... \\ \cdots \left[L^{\lambda(m)} M^{\mu(m)} T^{\tau(m)} \right]^{z(m)}. \qquad (6)$$

В условии (6) принято, что *c* – безразмерная величина. Упрощая условие (6) получим, что:

$$\pi = c \left[L^\phi M^\psi T^\eta \right], \qquad (7)$$

где

$$\phi = \sum_{i=1}^{m} \lambda(i) z(i); \qquad (7)$$

$$\psi = \sum_{i=1}^{m} \mu(i) z(i); \qquad (8)$$

$$\eta = \sum_{i=1}^{m} \tau(i) z(i). \qquad (9)$$

Пусть для систем *S1* и *S2* условия (7) …(9) в общем виде примут вид:

$$\pi_1 = x_1^{\alpha(1)} x_2^{\alpha(2)} ... x_k^{\alpha(k)}; \qquad (10)$$

$$\pi_2 = x_1^{\alpha(1)} x_2^{\alpha(2)} ... x_k^{\alpha(k)}. \qquad (11)$$

Отношение вида (13) называют индикатором подобия:

$$\Pi = \frac{\pi_1}{\pi_2} = \frac{\prod_{i=1}^{k} x_i^{\alpha(i)}}{\prod_{i=k+1}^{m} x_i^{\alpha(i)}} = \frac{x_1^{\alpha(1)} x_2^{\alpha(2)} ... x_k^{\alpha(k)}}{x_{k+1}^{\alpha(k+1)} x_{k+2}^{\alpha(k+2)} ... x_m^{\alpha(m)}}. \qquad (12)$$

если

$$\Pi = \begin{cases} 1, & \text{системы подобны;} \\ \neq 1, & \text{системы неподобны.} \end{cases} \qquad (13)$$

Анализ литературы. Из многочисленных работ, в которых описано применение теории подобия и размерностей рассмотрим только те, которые будут важны для пояснения целей данной работы.

В работе [7] для построения критериев подобия технологических процессов, связанных с виноделием, выбраны такие характеристики: потери напора на сетке, скорость движения очищенного сусла, характерный линейный размер отверстий сетки, коэффициент динамической вязкости, плотность сусла, частота регенерации сетчатой перегородки, ускорение силы тяжести, массовые концентрации смесей до и после очистки (Боже, что же мы пьём!). В этой работе специально указано, что все эти характеристики берутся только усреднёнными.

В работах [8, 9] отмечено, что при моделировании явлений и процессов, связанных с испытаниями ракетных двигателей необходимо при построении критериев подобия учитывать вероятностные свойства протекающих процессов. При этом возникает необходимость применения весьма громоздких при численной реализации и сложных при теоретическом обосновании методов оценки результатов моделирования. Подробно эти методы описаны в работе [6].

В работе [10] отмечено, что результаты оценки статистических свойств материалов необходимо учитывать при конструировании изделий из железобетона.

Особенности моделирования строительных конструкций в этом случае рассмотрены в работе [11]. Не следует думать, что модель – это нечто небольшое по размерам. Основные методические подходы к решению задач стохастического подобия описаны в работах [6, 11].

В работе [6] для решения задачи использованы методы, основанные на теории проверки статистических гипотез. Пусть величины x_i, случайны. Плотности вероятности каждой из них заданы и равны $f(x_i)$. Тогда примем, что нулевая гипотеза H_0 состоит в том, что $\omega(\pi_1)=\omega(\pi_2)$. Альтернативная ей гипотеза $H_1:\omega(\pi_1)\neq\omega(\pi_2)$. Тогда системы *S1* и *S2* будут подобными, если их критерий подобия:

$$\pi\in\left[\pi^-,\pi^+\right],\ \pi^- < \pi^+. \quad (14)$$

В условии (14) π^- и π^+ соответственно верхняя и нижняя границы для величины π, определяемые для доверительной вероятности γ, при уровне значимости гипотезы H_0, равному величине $1-\gamma$. В работе [11], используя метод линеаризации, описанный в работе [12], приведено решена задача по определению вероятности *P* того, что:

$$P\left[\Pi(1-\Delta)<\Pi(1+\Pi)\right]=\alpha,\ \Delta<1. \quad (15)$$

Объединяет эти методы, по нашему мнению, следующее: оба эти метода требуют большого объёма вычислений, результатом их применения будет определение интервала, к которому будет принадлежать численное значение критерия или индикатора подобия. Более простым способом вычисление значений критериев и индикаторов подобия может быть метод интервальных вычислений для чисел, заданных в системе центр – радиус. Основные сведения об этом методе его практическом применении приведены в работах [13…15].

Одна из основных теорем теории подобия, так называемая ПИ – теорема в работе [16] приведена в такой формулировке: «Функциональная зависимость между характеризующими процесс величинами может быть представлена в виде зависимости между составленным из них критериями подобия». В работах [17,18] на основе этой теоремы приведены решения линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами, используемыми при расчёте железобетонных конструкций. Показано, что на одном из этапов получения этого решения возникает необходимость интегрирования функции, аргументом которой служит критерий подобия π или один из сомножителей, входящих в него. Следует отметить, что интегрирование интервально определённых функций мало изучено. Даже в наиболее полной монографии по интервальному анализу [21] эта процедура вообще не упоминается. Авторам данного сообщения удалось найти только работу [22] близкую к рассматриваемой в данном сообщении задаче. Важный результат этой работы состоит в том, что при интегрировании интервально заданных функций допускается применение известных способов численного интегрирования только в том случае, когда используют интервальное расширение подынтегральной функции. Задача интегрирования таблично заданных интервальных функций в указанной работе и в иной, доступной авторам данного сообщения литературе, не рассмотрена.

Постановка задачи. Разработка методов вычисления и численного интегрирования критериев и индикаторов подобия, аргументы которых есть интервальные числа, заданные в системе центр – радиус.

Полученные результаты

Произвольное интервальное число $\langle X\rangle$, записанное в классическом виде , примет вид:

$$\langle X\rangle=\langle x-r_x;x+r_x\rangle; \quad (16)$$

в системе центр – радиус это же число представим как

$$\langle X\rangle=\langle x;r_x\rangle; \quad (17)$$

где x – центр интервального числа $\langle X\rangle$, r_x – его радиус. Следовательно, числитель и знаменатель выражения (12) примут следующий вид:

$$\pi_1=\prod_{i=1}^{k}\langle x_i;r_x(i)\rangle^{\alpha(i)}=\langle\pi_1;r_\pi(1)\rangle; \quad (18)$$

$$\pi_2=\prod_{i=k+1}^{mk}\langle x_i;r_x(i)\rangle^{\alpha(i)}=\langle\pi_2;r_\pi(2)\rangle. \quad (19)$$

В связи с тем, что в теории подобия показатели степени $\alpha(i)$ при размерных переменных постоянные числа, то их строгая запись должна быть такой:

$$\langle \mathrm{A}(i)\rangle=\langle\alpha(i);0\rangle. \quad (20)$$

Для получения в интервальном виде выражений (18) и (19) необходимо последовательно выполнить следующие действия. Так, как

$$x^b=\exp(b\ln x); \quad (21)$$

то для вычисления каждого из сомножителей в условиях (18) и (19) потребуется вычисление в интервальном виде логарифмической функции. Для выполнения вычислений использована процедура, описанная в работе [14].

Представим логарифмическую функцию как

$$\begin{gathered}\ln\langle x,r_x\rangle=\sum_{i=1}^{6}\langle a_i,0\rangle\cdot\Im_i=\langle L;r_L\rangle;\\ \Im_i=\left[\langle -1;0\rangle^{i-1}+\frac{\langle 1;0\rangle}{\langle x,r_x\rangle^i}\right]\frac{\left(\langle x,r_x\rangle-\langle 1;0\rangle\right)^i}{\langle i;0\rangle}.\end{gathered} \quad (22)$$

Коэффициенты $a_{i,}$ необходимые для вычисления величины $\ln\langle x,r_x\rangle$ приведены в табл. 1.

В [14] показано, что операция умножение интервального числа, представленного в системе центр-радиус, на постоянную величину примет вид

$$\langle A\rangle\cdot\langle B\rangle=\begin{cases}\langle a,0\rangle\langle b,r_b\rangle, A=const, B\neq consn;\\ \langle a,r_a\rangle\langle b,0\rangle, A\neq const, B=const.\end{cases} \quad (23)$$

Таблица 1 – **Значение коэффициентов для приближения функции ln(x)**

a_1	0,500000	a_4	0,030303
a_2	0,227273	a_5	0,007576
a_3	0,090909	a_6	0,0001082

Отсюда получим, что:

$$\langle b;0\rangle\cdot\langle L;r_l\rangle=\langle bL;br_L\rangle=\langle c;r_c\rangle. \quad (24)$$

Согласно работе [14] интервальное расширение величины $\exp(b\ln x)$ примет вид:

$$\langle e;0\rangle^{\langle c;r_{cx}\rangle}=\sum_{k=0}^{6}\frac{\left(\langle c;r_x\rangle\right)^k}{k!}. \quad (25)$$

Для возведения в целочисленную степень в работе [14] приведены формулы:

$$A^n=\langle a,r_a\rangle^n=\langle G,R\rangle; \quad (26)$$

при условии, что $n\in Z$.

Тогда:

$$G=\sum_{k=0}^{n}C_n^{2k}r_a^{2k}a^{n-2k};$$
$$R=\sum_{k=0}^{n}C_n^{2k+1}r_a^{2k+1}|a|^{n-(2k+1)}. \quad (27)$$

Для программирования процесса вычислений условие (27) представим их в виде:

$$A=\langle a;r_a\rangle^n=\langle a^2+r_a^2;2|a|r_a\rangle\underbrace{\left(\langle a;r_a\rangle\ldots\langle a;r_a\rangle\right)}_{n-2}. \quad (28)$$

Для удобства дальнейшей записи формул примем, что неинтервальное число $x^\alpha=\psi$. Его представление в системе центр – радиус будет таким:

$$\langle X^\alpha\rangle=\langle\psi;r_\psi\rangle; \quad (29)$$

где ψ и r_ψ соответственно центр и радиус этого числа, полученные в результате применения условий (22) … (28).

Величины π_1 и π_2 определённые условиями (18) и (19) и вычисленные в системе центр – радиус с учётом условий (22) – (29) примут вид:

$$\langle\pi_1;r_\pi(1)\rangle=\prod_{i=1}^{k}\langle\psi(i);r_\psi(i)\rangle; \quad (30)$$

$$\langle\pi_1;r_\pi(2)\rangle=\prod_{i=k+1}^{m}\langle\psi(i);r_\psi(i)\rangle. \quad (31)$$

Для получения условия (30) последовательно выполняют условия (32) и (33).

$$\langle\psi(1);r_\psi(1)\rangle\cdot\langle\psi(2);r_\psi(2)\rangle=$$
$$=\left\langle\begin{matrix}\psi(1)\psi(2)+r_\psi(1)r_\psi(2);\\ \psi(1)r_\psi(2)+\psi(2)r_\psi(1)\end{matrix}\right\rangle=\langle\rho(2);r_\rho(2)\rangle, \quad (32)$$

где

$$\rho(2)=\psi(1)\psi(2)+r_\psi(1)r_\psi(2);$$
$$r_\rho(2)=\psi(1)r_\psi(2)+\psi(2)r_\psi(1); \quad (33)$$

$$\langle\rho(k-1);r_\rho(k-1)\rangle\cdot\langle\psi(k);r_\psi(k)\rangle=$$
$$=\left\langle\begin{matrix}\rho(k-1)\psi(k)+r_\rho(k-1)r_\psi(k);\\ \rho(k-1)r_\psi(k)+r_\rho(k-1)\psi(k)=\\ =\langle\rho(k);r_\rho(k)\rangle=\langle\pi_1;r_\pi(1)\rangle\end{matrix}\right\rangle. \quad (34)$$

Для получения условия (31) последовательно выполняют условия (35)…(38).

$$\langle\psi(k+1);r_\psi(k+1)\rangle\cdot\langle\psi(k+2);r_\psi(k+2)\rangle=$$
$$=\left\langle\begin{matrix}\psi(k+1)\psi(k+2)+r_\psi(k+1)r_\psi(k+2);\\ \psi(k+1)r_\psi(k+2)+\psi(k+2)r_\psi(k+1)\end{matrix}\right\rangle= \quad (35)$$
$$=\langle\rho(k+2);r_\rho(k+2)\rangle,$$

где

$$r_\rho(2)=\psi(1)r_\psi(2)+\psi(2)r_\psi(1). \quad (36)$$

$$\rho(k+2)=\psi(k+1)\psi(k+2)+r_\psi(k+1)r_\psi(k+2); \quad (37)$$

$$\langle\rho(m-1);r_\rho(m-1)\rangle\cdot\langle\psi(m);r_\psi(m)\rangle=$$
$$=\left\langle\begin{matrix}\rho(m-1)\psi(m)+r_\rho(m-1)r_\psi(k);\\ \rho(m-1)r_\psi(m)+r_\rho(m-1)\psi(m)=\\ =\langle\rho(m);r_\rho(m)\rangle=\langle\pi_2;r_\pi(2)\rangle\end{matrix}\right\rangle. \quad (38)$$

Вычисление условий (34) и (38) позволяет получить верхние и нижние границы для критериев подобия, определённых условием (14). Для определения верхней и нижней границы индикатора подобия, определённых условием (15), выполним операцию системы интервального деления:

$$\langle\Pi\rangle=\frac{\langle\pi_1;r_\pi(1)\rangle}{\langle\pi_2;r_\pi(2)\rangle}=$$
$$=\left\langle\frac{\pi_1\pi_2+r_\pi(1)r_\pi(2)}{\pi_2^2-r_\pi^2(2)};\frac{\pi_1r_\pi(2)+\pi_2r_\pi(1)}{\pi_2^2-r_\pi^2(2)}\right\rangle. \quad (39)$$

Будем говорить, что системы *S1* и *S2* подобны с точностью до величины:

$$\Delta=\frac{\pi_1r_\pi(2)+\pi_2r_\pi(1)}{\pi_2^2-r_\pi^2(2)}, \quad (40)$$

если:

$$\xi_1-\xi_2<1<\xi_1+\xi_2;$$
$$\xi_1=\frac{\pi_1\pi_2+r_\pi(1)r_\pi(2)}{\pi_2^2-r_\pi^2(2)};\ \xi_2=\frac{\pi_1r_\pi(2)+\pi_2r_\pi(1)}{\pi_2^2-r_\pi^2(2)}. \quad (41)$$

В тех случаях, когда возникает необходимость интегрирования функций, аргументами которых служат критерии подобия или входящие в них сомножители, необходимо принимать во внимание то, что исходные данные для этой процедуры получают в результате экспериментов с физически реализованными системами, следовательно, их результаты, представлены в табличной форме, в общем случае, с произвольно расположенными узлами. Вначале рассмотрим процедуры численного интегрирования без учёта представления данных в интервальном виде.

Следуя работе [19, С. 195] назовём таблицей упорядоченную пару чисел $\left(x_i, y_i\right)$, для которой $x_1 < x_2 < ... < x_n$. Эта таблица задаёт точные значения (то есть такие, которые определены без учета погрешностей их измерения) функции $y_i = f(x_i)$. Используя обобщённую формулу трапеций получим:

$$I = \int_{x_1}^{x_n} f(x)dx \approx \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\left(x_{i+1} - x_i\right)\left(y_i + y_{i+1}\right). \quad (42)$$

В работе [20] приведена формула для численного интегрирования функции с неравно отстоящими узлами интегрирования:

$$I = \int_{x_1}^{x_n} f(x)dx \approx$$
$$\approx \sum_{i=2}^{n-1}\frac{x_i - x_{i-1}}{12}\left[5y_{i-1} + 7y_i - \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}\left(x_i - x_{i-1}\right)\right]. \quad (43)$$

Далее рассмотрим эти же процедуры, но при условии, что значения функции, переменной интегрирования и параметров функции которой представлены интервальными числами. Таблицей для интервально заданной упорядоченной пары чисел $\left(\langle X_i\rangle, \langle Y_i\rangle_i\right)$ назовём последовательность, для которой $\langle X_1\rangle < \langle X_2\rangle < ... < \langle X_n\rangle$. В соответствии с работой [14] будем считать, что интервальное число A_1 меньше интервального числа A_2 если:

$$(A_1 = \langle a_1; r_{a1}\rangle) < (A_2 = \langle a_2; r_{a2}\rangle) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_1 + r_{a1} < a_2 - r_{a2}. \quad (44)$$

Для получения интервального расширения численного интегрирования с произвольным расположением узлов по формуле трапеций необходимо выполнить следующую последовательность действий:

$$x_i \to \left[X\right](i) = \left(\hat{x}(i); r_x(i)\right);$$
$$y_i \to \left[Y\right](i) = \left(\hat{y}(i); r_y(i)\right); \quad (45)$$

$$x_{i+1} - x_i \to \left(\left(\hat{x}(i+1); r_x(i+1)\right) - \left(\hat{x}(i); r_x(i)\right)\right) =$$
$$= (\hat{x}(i+1) - \hat{x}(i); r_x(i+1) + r_x(i) = (u_i; r_u(i)); \quad (46)$$

$$y_{i+1} + y_i \to \left(\left(\hat{y}(i+1); r_y(i+1)\right) + \left(\hat{y}(i); r_y(i)\right)\right) =$$
$$(\hat{y}(i+1) + \hat{y}(i); r_y(i+1) + r_y(i) = (v_i; r_v(i)); \quad (47)$$

$$(x_{i+1} - x_i)\cdot(y_i + y_{i+1}) \to (u(i); r_u(i))\cdot(v(i); r_v(i)) =$$
$$= (u(i)v(i) + r_u(i)\cdot r_v(i); u(i)r_v(i) + v\ (i)r_u(i)); \quad (48)$$

$$\langle I\rangle \in \left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n-1}\begin{pmatrix}(u(i)v(i) + r_u(i)\cdot r_v(i));\\ (u(i)r_v(i) + v(i)r_u(i))\end{pmatrix}\right). \quad (49)$$

Запись формулы (43) в интервальном виде нецелесообразна ввиду её громоздкости. Поэтому вычисления следует выполнять, используя описанный в работе [14] калькулятор.

Рассмотрим численные примеры применения предложенных в данной работе методов.

В работе [23] при моделировании процесса сушки грибов использован критерий Рейнольдса, имеющий вид:

$$\mathrm{Re} = \frac{wd\rho}{\mu}; \quad (50)$$

В табл. 2 приведены названия величин, входящих в критерий Рейнольдса и их размерности в системе СИ.

Таблица 2 – **Величины, входящие в критерий Рейнольдса, и их размерности в системе СИ**

Величина	**Символ**	**Размерность**
Скорость теплоносителя	w	LT^{-1}
Размер частицы	d	L
Плотность жидкости	ρ	ML^{-3}
Вязкость жидкости	μ	$ML^{-1}T^{-1}$

Численное значение этого критерия, согласно условиям (2), (12) определено по условию:

$$\mathrm{Re} = \frac{c_1\left[LT^{-1}\right]c_2\left[L\right]c_3\left[ML^{-3}\right]}{c_4\left[ML^{-1}T^{-1}\right]} = C;$$
$$C = \frac{c_1c_2c_3}{c_4}. \quad (51)$$

Используя данные, приведенные в работе [23] выполним расчет величины критерия Рейнольдса для нескольких условных систем. Численные значения величин, входящих в этот критерий взяты близкими к реальным системам.

Результаты расчётов, выполненных по условиям (50), (51) приведены в табл. 3.

Таблица 3 – **Расчёт критерий Рейнольдса для моделируемых систем**

$\Im$	Сравниваемые системы			
	S_1	S_2	S_3	S_4
w	5	5,1	4,95	5,05
d	0,140	0,143	0,144	0,138
ρ	550	562	556	548
μ	0,065	0,064	0,061	0,065
Re	5923,07	6404,16	6497	5875
Π_i	1	0,925	0,912	1,008

Примечание: столик $\Im$ – символы расчётных величин, критерия *Re*, индикатора подобия

Индикатор подобия Π_i (i=2,3,4) по отношению к системе, исходя из условия (13), вычислен по правилу:

$$\Pi_i = \Pi_1 / \Pi_i,\ i = 1,2,3,4. \quad (52)$$

В этом примере система S_1 принята в качестве системы – оригинала. Таким образом, буквально следуя условию (13), следует признать, что системы $S_2 \ldots S_4$ не могут быть моделями системы S_1.

Результаты вычислений значений индикаторов подобия (52) для систем $S_1 \ldots S_4$ полученные в системе центр –радиус и преобразованные для удобства восприятия в классический вид, описанный в работе [21] приведены в табл. 4.

При подготовке исходных данных для численных примеров принято, что:

$$\langle A \rangle_i = \langle a; r_a(i) \rangle = \langle a_i; 0{,}025 a_i \rangle . \qquad (53)$$

Таблица 4 – **Интервальные значения критериев подобия Π_i для систем $S_1 \ldots S_4$**

Сравниваемые системы							
S_1		S_2		S_3		S_4	
НГ*)	ВГ**)	НГ	ВГ	НГ	ВГ	НГ	ВГ
0,801	1,246	0,844	1,112	0,841	1,448	0,797	1,237

Примечание: НГ*) - нижняя граница интервала,
ВГ**)- верхняя граница интервала.

Из приведенных результатов следует, что только система S_2 может быть моделью системы S_1, потому, что $S_2 \subset S_1$.

Для оценки влияния представления исходных данных в интервальном виде на результаты численного интегрирования рассмотрим выражение вида:

$$I = \int_0^1 (2x^3 - 3x^2 + 5x + 1)dx . \qquad (53)$$

Все вычисления выполнены при количестве узлов интегрирования $n = 13$. Результаты вычислений приведены в табл. 5, 6.

Приведенные вычисления наглядно показывают, что вычисление критериев и индикаторов подобия и функций от них без учёта их возможных интервалов определения может приводить к ошибочным выводам о результатах моделирования.

Таблица 5 – **Результаты вычисления значений интеграла с учётом интервальных свойств переменной подынтегральной функции**

Способ решения		Границы интервалов		
		Левая	Центр	Правая
Аналитический		-	3,0	-
Формула трапеций	Равноотстоящие узлы, [19]	2,89	3,0	3,11
	Неравноотстоящие узлы, [19]	2,79	2,94	3,09
	Неравноотстоящие узлы, [20]	2,90	3,04	3,14

Таблица 6 – **Результаты вычисления значений интеграла с учётом интервальных свойств переменной и коэффициентов подынтегральной функции**

Способ решения		Границы интервалов		
		Левая	Центр	Правая
Аналитический		-	3,0	-
Формула трапеций	Равноотстоящие узлы, [19]	2,86	3,02	3,18
	Неравноотстоящие узлы, [19]	2,77	3,03	3,29
	Неравноотстоящие узлы, [20]	2,67	2,96	3,25

Выводы

1. Описано применение интервальных вычислений в системе центр- радиус для определения значений критериев и индикаторов подобия.
2. Предложена методика численного интегрирования таблично заданной подынтегральной функции с произвольным расположением узлов интегрирования при условии, что исходные данные представлены в виде интервальных чисел, определённых в системе центр – радиус.
3. Приведен численный пример, иллюстрирующий полученные результаты.
4. Показано, что вычисление критериев и индикаторов подобия и функций от них без учёта их возможных интервалов определения может приводить к ошибочным выводам о результатах моделирования.

Список литературы

1. Новый политехнический словарь / Гл. ред. А. Ю. Ишлинский. – Москва: БРЭ, 2001. – 671 с.
2. Бриджмен П. Анализ размерностей / П. Бриджмен. – Ижевск: НИЦ «Регул. и хаот. динамика», 2001. – 148 с.
3. Веников В. А. Теория подобия и моделирования (применительно к задачам электроэнергетики) / В. А. Веников, Г. В. Веников. – М.: Высшая школа,1984. – 439 с.
4. Марусина М. Я. Приложения теории размерностей и теории групп в механике / М. Я. Марусина, А. В. Флегонтов // Научное приборостроение. – 2005. – Том 15, № 1. – С. 94–99.
5. Овсянников Л. В. Групповой анализ дифференциальных уравнений / Л. В. Овсянников. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
6. Северцев Н. А. Статистическая теория подобия в задачах безопасности и надежности динамических систем / Н. А. Северцев. – Москва: Радиотехника, 2016. – 398 с.
7. Виноградов В. А. Применение методов теории подобия и размерностей при физико-математическом моделировании процессов и оборудования в винодельческом производстве / А. В. Виноградов // Магарач. Виноградарство и виноделие. – 2013. – № 3. – С. 30–33.
8. Нешев С. С. Применение критериев подобия при проектировании РДТТ / С. С. Нешев, В. Ф. Молчанов, А. Ф. Сальников // Вестник Пермского национального исследовательского политехнического университета. Аэрокосмическая техника. – 2012. – № 33. – С. 66–76.
9. Оценивание адекватности условий отработки изделий ракетной техники как сложных систем с применением теории статистического подобия / Л. В. Кривобоков, Д. В. Дунаев, А. В. Демченко // Техническая механика. – 2017. – № 3. – С. 64–71.
10. Бондаренко В. М. Железобетонные и каменные конструкции / В. М. Бондаренко, Д. Г. Суворин. – Москва: Высшая школа, 1987. – 384 с.
11. Мастаченко В. Н. Надёжность моделирования строительных конструкций / В. Н. Мастаченко. – М.: Стройиздат, 1974 – 88 с.

12. Вентцель Е. С. Теория вероятностей / Е. С. Вентцель. – Москва: Высшая. школа, 1999. – 576 с.
13. Жуковська О. А. Основи інтервального аналізу / О. А. Жуковська. – К.: Освіта України, 2009. – 136 с.
14. Дубницкий В. Ю. Вычисление значений элементарных и специальных функций с интервально заданным аргументом, определённым в системе центр-радиус / В. Ю. Дубницкий, А. М. Кобылин, О. А. Кобылин // Прикладная радиоэлектроника. – 2017. – Т. 16, № 3-4. – С. 147–154.
15. Дубницкий В.Ю. Интервальное оценивание количества участников массовых протестных акций / В.Ю. Дубницкий, Г.Г. Зубрицкая, А.М. Кобылин // Сучасні інформаційні системи. – 2018. – Т. 2, № 4. – С. 11–20. DOI: https://doi.org/10.20998/2522-9052.2018.4.02
16. Алабужев П. М. Теории подобия и размерностей. Моделирование / П. М. Алабужев, В. Б. Геронимус, Л. М. Минкевич, Б. А. Шеховцов. – Москва: Высшая школа, 1968. – 208 с.
17. Одокиенко С. Н. Интегральный метод анализа напряженно-деформированного состояния элементов строительных конструкций с учетом старения бетона / С. Н. Одокиенко, А. А. Дячук, С. Ю. Протасов // Моделювання та інформаційні технології. – 2008. – Вип. 46. – С. 3–8.
18. Варданян Г. С. Основы теории подобия и анализа размерностей / Г.С. Варданян. Москва: МИСИ, 1977. – 121 с.
19. Каханер Д. Численные методы и программное обеспечение / Д. Каханер, К. Моулер, С. Нэш. – М.: Мир, 1998. – 575 с.
20. Захребетков Ю. В. Формула численного интегрирования сложных функций с произвольно неравноотстоящими узлами / Ю. В. Захребетков // Заводская лаборатория. – 1994. – № 3. – С. 55–60.
21. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ / С.П. Шарый. – Новосибирск: XYZ, 2019. – 632 с.
22. Базаров М. Б. Новые алгоритмы вычисления определённых интегралов / М. Б. Базаров // Международная конференция по Вычислительной математике МКВМ 2004. – Новосибирск, 2004. – С. 166–176.
23. Малежик І. Ф. Застосування теорії подібності в моделюванні процесу конвективно–терморадіаційного сушіння культивованих грибів / Ї. Ф. Малежик, Т. В. Бурлака, І. В. Дубковецький, В. Є. Деканьский // Збірник наукових праць Одеської національної академії харчових технологій. – 2017. – Том 81, випуск 1. – С. 141–147.
24. Агеев В. МиГ-21И. Самолет-аналог сверхзвукового лайнера Ту-144 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://vpk.name/news/213979_mig21i_samoletanalog_sverhzvukovogo_lainera_tu144.html / 28.05.2019. Загл. с экрана.
25. Балакин С. А. Авианосцы Второй мировой / С. А. Балакин, А. В. Дашьян, М. Э. Морозов. – М.: Колл. Яуза, 2007. – 256 с.

References

1. Ishlinskiy, A.Yu. (2001), *New Polytechnic Dictionary*, The Great Russian Encyclopedia, Moskow, 671 p.
2. Bridzhmen, P. (2001), *Dimensional Analysis*, SRC«Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika», Izhevsk, 148 p.
3. Venikov, V.A. and Venikov, G.V. (1984), *The theory of similarity and modeling (applied to the problems of electric power industry*, Vysshaja shkola, Moskow, 439 p.
4. Marusina, M.Ya. and Phlegontov, A.V. (2005), "Applications of the theory of dimensions and the theory of groups in mechanics", *Scientific instrument making*, Vol. 15, No. 1, pp. 94– 99.
5. Ovsjannikov, L.V. (1978), "*Group analysis of differential equations*", Nauka, Moscow ,400 p.
6. Severcev, N.A. (2016), "*Statistical theory of similarity in problems of safety and reliability of dynamic systems*", Radiotehnika, Moscow, 398 p.
7. Vinogradov, V.A. (2013), "Application of methods of the theory of similarity and dimensions in the physical and mathematical modeling of processes and equipment in wine production", *Vinogradstvo and winemaking,* No. 3, pp. 30–33.
8. Neshev, S.S., Molchanov, V.F and Salnikov, A.F. (2012), "Using the similarity theory for solid rocket motors design", *Bulletin of the Perm National Research Polytechnic University. Aerospace engineering*, No. 33, pp. 66–76.
9. Krivobokov, L.V., Dunaev, D.V. and Demchenko, A.V. (2017), "Assessment of the adequacy of the conditions for the development of rocket technology products as complex systems using the statistical similarity theory", *Technical Mechanics,* No. 3, pp. 64–71.
10. Bndarenko, V.M. and Suvorin, D.G. (1987), *Reinforced concrete and stone structures*, Vysshaja shkola, Moscow, 384 p.
11. Mastachenko, V.N. (1974), "*Reliability modeling of building structures*", Strojizdat, Moscow, 88 p.
12. Vencel, E.S. (1969), "*Probability theory"*, Nauka, Moskow, 576 p.
13. Zhukovska, O.A. (2009), *Fundamentals of interval analysis*, Osvita Ukrainy, Kyiv, 136 p.
14. Dubnitskiy, V.Yu., Kobylin, A.M. and Kobylin, O.A. (2017), "Calculation of elementary and spesial function values with interval stated argument determined in center-radius system", *Applied Radio Electronics*, Vol. 16, No. 3-4, pp. 147–154.
15. Dubnitskiy, V, Zubrytska, H. and Kobylin A. (2018), "Interval estimation of the number of participants of mass protest actions", *Advanced Information Systems*, Volume 2, No. 4, pp. 11–21, DOI: https://doi.org/10.20998/2522-9052.2018.4.02
16. Alabuzhev, P.M., Geronimus, V.B., Minkevich and Shehovcov, B.A. (1968), "*Theories of similarity and dimensions. Modeling*", Vysshaja shkola, Moskow, 208 p.
17. Odokienko, S.N., Djachuk, A.A. and Protasov, S.Ju. (2008), "The integral method of stress-strain analysis of the state of the elements of building structures with regard to the aging of concrete", *Modeliuvania ta informatsiini tekhnolohii,* No. 46, pp. 3-8.
18. Vardanyan, G.S. (1977), *Fundamentals of the theory of similarity and analysis of dimensions*, MECI, Moscow, 121 p.
19. Kahaner, D., Mowler, K. and Nash, S. (1998), *Computational methods and software*, MIR, Moscow, MIR, 575 p.
20. Zahrebetkov, Ju.V. (1994), "A formula for the numerical integration of complex functions with arbitrarily non-equidistant nodes", *Factory Laboratory*, No. 3. pp. 55–60.
21. Sharyj, S.P. (2019), *Finite-dimensional interval analysis*, XYZ, Novosibirsk, 632 p.
22. Bazarov, M.B. (2004), "New algorithms for calculating certain integrals", *International Conference on Computational Mathematics ICLM*, Novosibirsk, pp. 166–176.
23. Malezhyk, I.F., Burlaka, T.V. Dubkovetskyi, I.V. and Dekansky V.Ie. (2017), "Application of the similarity theory in modeling the process of convection - thermo-radiation drying of cultivated mushrooms", *Collection of scientific works of Odessa National Academy of Food Technologies,* Volume 81, Issue 1, pp. 141–147.

24. Ageev, V. (2019), The aircraft is an analogue of the supersonic airliner Tu-144, available at: https://vpk.name/news/213979_mig21i_samoletanalog_sverhzvukovogo_lainera_tu144.html
25. Balakin S.A., Dash'jan, A.V. and Morozov M.Je. (2007), *Aircraft carriers of World War II*, Collection-Yauza, Moscow, 256 p.

Received (Надійшла) 23.05.2019
Accepted for publication (Прийнята до друку) 31.07.2019

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ / ABOUT THE AUTHORS

Дубницький Валерій Юрійович – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, старший науковий співробітник, Харківський навчально-науковий інститут ДВНЗ "Університет банківської справи", Харків, Україна;
Valeriy Dubnitskiy – Candidate of Technical Sciences, Senior Research, Senior Research Associate of Kharkiv, Educational Scientific institute SHEI "University of Banking", Kharkiv, Ukraine;
e-mail: dubnitskiy@gmail.com; ORCID ID: http://orcid.org/0000-0003-1924-4104

Кобилін Анатолій Михайлович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри інформаційних технологій, Харківський навчально-науковий інститут ДВНЗ «Університет банківської справи», Харків, Україна;
Anatoliy Kobylin – Sandidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of information technology Department, Educational Scientific institute SHEI "University of Banking", Kharkiv, Ukraine;
e-mail: anatoliy_kam@ukr.net; ORCID ID: http://orcid.org/0000-0002-8083-0762

Кобилін Олег Анатолійович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри інформатики, Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, Україна;
Oleg Kobylin – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor, Associate Professor of Computer Science Department, Kharkiv National University of Radio Electronics, Kharkiv, Ukraine;
e-mail: khodyrev@gmail.com; ORCID ID: https://orcid.org/0000-0001-9871-9440

Обчислення індикаторів подібності і чисельне інтегрування критеріїв подібності, інтервально визначених в системі центр – радіус

В. Ю. Дубницкий, А. М. Кобилін, О. А. Кобилін,

Анотація. Мета роботи полягає в розробці методів обчислення і чисельного інтегрування критеріїв і індикаторів подібності, аргументами яких служать інтервальні числа, задані в системі центр – радіус. **Результати.** Описано застосування інтервальних обчислень в системі центр- радіус для визначення значень критеріїв і індикаторів подібності. Запропонована методика чисельного інтегрування таблично заданої підінтегральної функції з довільним розташуванням вузлів інтегрування за умови, що початкові дані представлені у вигляді інтервальних чисел, визначених в системі центр – радіус. Наведено чисельний приклад, що ілюструє отримані результати. Показано, що обчислення критеріїв і індикаторів подібності і функцій від них без урахування можливих інтервалів визначення може приводити до помилкових висновків про результати моделювання.

Ключові слова: теорія подібності і розмірностей; критерії подібності; індикатори подібності; інтервальні обчислення; чисельне інтегрування таблично заданих функцій з довільним розташуванням вузлів.

Derivation of the similarity indicators and numerical integration of the similarity criterions, which are interval-based in system center-radius

V. Dubnitskiy, A. Kobylin, O. Kobylin

Abstract. In frame of this work only physically realizable systems will be considered, namely such systems, which may be presented as unity of physical elements, structurally adjusted each to another and interacted with external medium. The physical modeling for such systems, that it is based on theory of similarities on starting stage of projecting, works as useful source of knowledge about their properties. It is known that theory of similarities studies the conditions for similarities of physical processes. Two physical processes are called similar, when they obey the same physical laws. Each quantitative characteristic for one of them is obtained from another by means of multiplication on the constant value. This value is called the constant of similarity, and it is the same for all uniform values, which are involved in process under investigation. It is a rule in theory of similarities, that two phenomena are similar if and only if, when they are qualitatively similar and have equal values for some dimensionless parameters, which are called criterions of similarities. It is also rule in theory of similarities, that dimension of any physical value may be only the multiplication of values, which are in powers, and taken as basis values. Dimensions for both parts of equality, that presents same physical law, must be the same. Dimensionless multiplications of different powers are called as criteria of similarity. In this work some features of calculation processes, connected with definitions of numerical values for criterions of similarities, will be presented. Due to the fact, that numerical values of the similarity criterions are obtained from the experimental results, these results are defined with some error, which influences the decision about similarities of the systems under comparison. To define this influence the procedure of calculation for criterions and indicators of similarities with the interval numbers is used, defined in the system center-radius. In this work the algorithm of consecutive multiplication in the interval-based view of factors, each of those presents a power function, and the algorithm for derivation of the similarity indicator are presented. The interval evaluation for the similarity indicators is obtained, depending on value of the definition intervals for corresponding values. Algorithms for numerical integration with trapezoidal rule with regular and arbitrary distribution of nodes are presented. It is shown, that for relatively simple, in respect of calculation, criteria of similarities, the neglect by experimental errors may lead to misleading conclusions about quality of the models proposed. Numerical example with evaluation of the quality for proposed physical model is considered, comparison was done for Reynolds criterion.

Keywords: theory of similarity and dimensions; similarity criteria; similarity indicators; interval calculations; numerical integration of tabulated functions with arbitrary arrangement of nodes.