Applied problems of information systems operation

УДК 519.668:319.66 **doi:** https://doi.org/10.20998/2522-9052.2021.4.16

В. Ю. Дубницький[1], А. М. Кобилін[1], О. А. Кобилін[2], Ю. І. Кушнерук[3]

[1] ННІ “Каразінський банківський інститут” ХНУ імені В. Н. Каразіна, Харків, Україна
[2] Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, Україна
[3] Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків, Україна

EXCEL – ОРІЄНТОВАНА ПРОЦЕДУРА ДЛЯ ОБЧИСЛЕННЯ ЗНАЧЕНЬ СПЕЦІАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ З ІНТЕРВАЛЬНИМ АРГУМЕНТОМ, ЗАДАНИМ В ГІПЕРБОЛІЧНІЙ ФОРМІ

Анотація. Мета роботи. Запропонувати основні положення EXCEL – орієнтованих процедур для обчислення значень елементарних і спеціальних функцій з інтервальним аргументом, заданим в гіперболічній формі. **Результати роботи.** Розглянуто способи подання інтервальних чисел в гіперболічній формі і правила виконання операцій додавання, віднімання, множення та ділення цих чисел. Описано процедури визначення чисельних значень функцій, аргументи яких можуть бути виродженими і інтервальними числами, а саме: прямих і обернених функцій прямолінійної тригонометрії, прямих і обернених функцій гіперболічної тригонометрії, експоненціальної, довільної показникової і степеневої функції, Гамма - функції, неповної Гамма – функції, дігамма – функції, тригамма – функції, тетрагамма – функції, пентагамма – функції, Бета – функції і її частинних похідних, інтегральної показникової функції, інтегрального логарифма, ділогарифма, інтегралів Френеля, інтегрального синуса, інтегрального косинуса, інтегрального гіперболічного синуса, інтегрального гіперболічного косинуса. Запропоновано основні положення EXCEL – орієнтованих процедур для обчислення значень елементарних і спеціальних функцій з інтервальним аргументом, який заданий в гіперболічній формі Наведено чисельні приклади, що ілюструють використання запропонованих методів.

Ключові слова: інтервальна арифметика; гіперболічна форма інтервального числа; спеціальні функції; чисельні методи.

Вступ

Задачі обчислення значень елементарних і спеціальних функцій історично були одними з перших задач, розв’язаних на комп'ютерах [1]. З тієї пори і до сьогоднішнього дня вони залишаються актуальними тому, що методи їх розв’язання істотно залежать від безперервної зміни архітектури комп'ютерів. Детально ці методи розглянуто в роботах [2, 6, 8, 9, 17]. Головна особливість цих робіт, з погляду авторів даного повідомлення, в тому, що в них для проведення обчислень застосована традиційна евклідова арифметика. Використання інтервально визначених чисел у вказаних роботах не розглянуто. В роботі [7] розглянуто розв’язання задачі визначення значень елементарних і деяких спеціальних функцій у разі інтервально заданого аргументу, визначеного в системі ЦЕНТР – РАДІУС. В роботі [10] наведено відомості про систему комп'ютерної алгебри Math Partner, призначеної для виконання дій з інтервальними числами, які визначені відповідно до правил класичної і нестандартної інтервальної арифметики. Детальніше ця система описана в роботі [11].

Сьогодні обчислення значень багатьох видів спеціальних функцій, аргументи яких визначено у традиційній формі, входить у всі математичні пакети. В той же час номенклатура спеціальних функцій, які включені в систему EXCEL, обмежена обчисленням значень логарифма Гамма – функції і функцій Бесселя. Оскільки EXCEL є один з найбільш поширених пакетів, то завдання розширення його обчислювальних можливостей, на думку авторів даного повідомлення, може бути важливим і актуальним. Це обумовлено тим, що авторам не вдалося знайти в доступній для них літературі опису способів застосування системи EXCEL для обчислення значень спеціальних функцій. Перелік функцій, обчислення значень яких розглянуте в даній роботі, багато в чому суб'єктивний. Він був визначений в результаті аналізу робіт [2, 3, 16], зручності програмної реалізації вибраних алгоритмів обчислення функцій в системі EXCEL, науковими інтересами авторів і їх досвіду, отриманого при виконанні роботи [7].

Аналіз літератури. Даний розділ складається з двох частин. У першій частині розглянуто використані в даному повідомленні способи обчислення значень спеціальних функцій, які описано в роботах [2,17,18,19]. Далі цю обставину буде використана за умовчанням. При описі способів обчислення значень функцій застосована їх класифікація, яку наведено в роботі [4]. У другій частині розглянуто особливості операцій з інтервальними числами в гіперболічній формі.

Результати досліджень

Способи обчислення значень спеціальних функцій. *Обчислення показникової і степеневої функції.* До складу вбудованих функцій системи EXCEL входять функції СТЕПЕНЬ і EXP. Перша функція повертає результат піднесення числа в степінь, друга повертає значення експоненти. У подальшому викладі будуть використані наступні варіанти використання цих функцій:

$y = \exp(x)$; $a^x = \exp(x \ln a)$; $x^a = \exp(a \ln x)$.

Обчислення значень основних функцій прямолінійної тригонометрії. У перелік вбудованих функцій системи EXCEL включено функції COS, SIN, TAN. Для обчислення функції $y = ctgx$ слід обчислювати значення функції $ctgx = 1/tgx$.

Для обчислення значень обернених тригонометричних функцій слід використовувати вбудовані функції ACOS, ASIN, ATAN. Значення функцій $\arccos x$ $arcctgx$ визначають згідно з виразами:

$$\arccos x = \pi/2 - \arcsin x, \quad \mathrm{arcctgx} = \pi/2 - \mathrm{arctgx}. \quad (1)$$

Обчислення значень основних функцій гіперболічної тригонометрії. Зведення про властивості гіперболічних функцій, які використані в цій роботі наведено в [20].

У перелік вбудованих функцій системи EXCEL включено функції COSH, SINH, TANH. Значення функції $y = cthx$ визначають, використовуючи вираз

$$cthx = 1/thx. \quad (2)$$

Для обчислення значень обернених гіперболічних функцій слід використовувати вбудовані функції ACOSH, ASINH, ATANH.

Значення функції $y = Arcthx$ визначають по за співвідношенням:

$$Arcthx = Arth(1/x). \quad (3)$$

Обчислення значень Гамма – функції і споріднених з нею функцій. У перелік вбудованих функцій системи EXCEL включена функція ГАММАНЛОГ, яка дозволяє обчислювати значення натурального логарифма Гамма – функції, яка визначається виразом:

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \ \mathrm{z>0}. \quad (4)$$

Отже, для визначення чисельного значення $\Gamma(z)$ необхідно обчислити наступне значення :

$$\Gamma(z) = \exp\left[\ln \Gamma(z)\right]. \quad (5)$$

Обчислення значень неповної Гамма - функції. Основні визначення неповної Гамма – функції, зв'язки між ними і способи їх обчислення представлено в табл. 1. Використана в даній роботі процедура для обчислення неповної Гамма – функції відрізняється від використаної для цієї ж мети процедури, що описана в [7]. Ця заміна обумовлена тим, що застосована в нашому випадку процедура дає інтервал меншої ширини в порівнянні з [7] і зручніша для програмування обчислень в системі EXCEL, особливо при обчисленні функції $\gamma^*(a, x)$.

Обчислення значень Бета – функції. Бета – функцію $\mathrm{B}(z, w)$ визначають за співвідношенням:

$$\mathrm{B}(z, w) = \int_0^1 t^{z-1} e^{-t} dt = \mathrm{B}(w, z) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(w+z)}. \quad (6)$$

З співвідношень : (5,6) отримаємо, що:

$$\mathrm{B}(z, w) = \frac{\exp[\ln \Gamma(z) + \ln \Gamma(w)]}{\exp[\ln \Gamma(z+w)]}. \quad (7)$$

Обчислення значень полігамма – функцій. Розрахункові формули для визначення значень полигама – функцій наведено в табл. 2.

Спосіб розрахунку чисельних значень частинних похідних Бета – функції наведений в табл. 3. Обчислення значень функції $\mathrm{B}(z, w)$ виконують відповідно за співвідношенням: (7), спосіб обчислення Псі – функції наведений в табл. 2.

Інтегральна показникова і споріднені з нею функції. До інтегральної показникової і споріднених з нею функцій у відповідності з роботою [4] відносять

Таблиця 1 – **Обчислення значень неповної Гамма – функції**

	Вигляд неповної Гамма - функції		
	$\gamma(a, x)$	$\Gamma(a, x)$	$\gamma^*(a, x)$
Визначення	$\gamma(a, x) = \int_0^x e^{-t} t^{a-1} dt$	$\Gamma(a, x) = \int_x^\infty e^{-t} t^{a-1} dt$	$\gamma^*(a, x) = \frac{x^{-a}}{\Gamma(a)} \int_0^x e^{-t} t^{a-1} dt$
Обчислення	$\gamma(a, x) = x^a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x)^n}{n!(a+n)}$	$\Gamma(a, x) = \exp[\ln \Gamma(a)] - \gamma(a, x)$	$\gamma^*(a, x) = x^{-a} \frac{\gamma(a, x)}{\exp[\ln \Gamma(a)]}$

Таблиця 2 – **Обчислення значень полігамма – функцій**

Найменування функції	**Визначення функції**	**Розрахункова формула**
Дігамма –функция (Псі-функція)	$\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z)$	$\psi(z) = \ln z - \frac{1}{2z} - \frac{1}{12z^2} + \frac{1}{120z^4} - \frac{1}{252z^6}$
Тригамма- функція	$\psi'(z) = \frac{d^2}{dz^2} \ln \Gamma(z)$	$\psi'(z) = \frac{1}{z} + \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{6z^3} - \frac{1}{30z^5} + \frac{1}{42z^7} - \frac{1}{30z^9}$
Тетрагамма - функція	$\psi''(z) = \frac{d^3}{dz^3} \ln \Gamma(z)$	$\psi''(z) = -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \frac{1}{2z^4} + \frac{1}{6z^6} - \frac{1}{6z^8} - \frac{5}{6z^{12}}$
Пентагамма - функція	$\psi^{(3)}(z) = \frac{dz^4}{dz^4} \ln \Gamma(z)$	$\psi^{(3)}(z) = \frac{2}{z^3} + \frac{3}{z^4} + \frac{2}{z^5} - \frac{1}{z^7} + \frac{4}{3z^9} - \frac{3}{z^{11}} + \frac{10}{z^{13}}$

Таблиця 3 – **Обчислення значень частинних похідних Бета – функції**

Визначення частинних похідних та розрахункові формули
$\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{B}(z,w)=\mathrm{B}(z,w)\cdot\left[\psi(z)-\psi(z+w)\right]$
$\frac{\partial}{\partial w}\mathrm{B}(z,w)=\mathrm{B}(z,w)\cdot\left[\psi(w)-\psi(z+w)\right]$

інтегральну показникову функцію, інтегральний логарифм, ділогарифм, інтеграли Френеля, інтегральний синус і косинус, інтегральні гіперболічний синус і косинус.

Обчислення значень інтегральної показникової функції. Інтегральною показниковою функцією називають функцію виду:

$$Ei(x)=\int_{-\infty}^{x} e^t/t \ dx\ , \quad x<0\ . \tag{8}$$

Для обчислення її значень використовується:

$$Ei(x)=C+\ln|x|+\sum_{k=1}^{6}\frac{x^k}{k\cdot k!}\ , \quad x\neq 0\ . \tag{9}$$

У цьому виразі С – стала Ейлера, С = 0,57721. Значення величини $\left(k\cdot k!\right)^{-1}$ наведено в табл.4. Обмеження на величину x в (9) обумовлено фізичним змістом задач, які розглядали автори.

Таблиця 4 – **Значення коефіцієнтів** $\left(k\cdot k!\right)^{-1}$

Значення індексу k	Значення коефіцієнтів $\left(k\cdot k!\right)^{-1}$	Значення індексу k	Значення коефіцієнтів $\left(k\cdot k!\right)^{-1}$
1	1	4	0,01046
2	0,25	5	0,00166
3	0,05555	6	0,00231

Обчислення значень інтегрального логарифма. Інтегральним логарифмом називають функцію:

$$li(x)=\int_0^x\frac{dt}{\ln t}=Ei(\ln x)\ ,\ 0<x<1,\ x>1\ . \tag{10}$$

Для обчислення її значень використовується співвідношення:

$$li(x)=C+\ln|\ln x|+\sum_{k=1}^{6}\frac{x^k}{k\cdot k!}\ ,\ 0<x<1,\ x>1\ . \tag{11}$$

Значення коефіцієнтів $\left(k\cdot k!\right)^{-1}$ наведено в табл. 4.

Обчислення значень ділогарифма. Ділогаріфмом називають функцію:

$$Li_2(x)=-\int_0^x\frac{\ln(1-t)}{t}dt\ ,\quad x\leq 1. \tag{12}$$

Значення цієї функції визначають таким чином:

$$Li_2(x)=\frac{x}{x+1}\left[3+\sum_{k=1}^{8}\frac{x^k}{k^2(k+1)^2}\right]- \\ -2\left((x-1)/(x+1)\right)\ln(1-x),\quad x<1. \tag{13}$$

Значення величин $\left[k^2(k+1)^2\right]^{-1}$ наведено в табл. 5.

Таблиця 5 – **Значення коефіцієнтів** $\left[k^2(k+1)^2\right]^{-1}$

Значення індексу k	Значення коефіцієнтів $\left[k^2(k+1)^2\right]^{-1}$	Значення індексу k	Значення коефіцієнтів $\left[k^2(k+1)^2\right]^{-1}$
1	0,25	5	0,00111
2	0,02777	6	0,00056
3	0,00694	7	0,00032
4	0,0025	8	0,00029

Обчислення значень інтегралів Френеля. Інтегралами Френеля називають інтеграли виду:

$$C(x)=\int_0^x\frac{\cos t}{\sqrt{t}}dt\ ,\qquad S(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt\ . \tag{14}$$

Степеневе розкладання цих функцій має вигляд:

$$C(x)=\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!\cdot(4k+1)};$$
$$S(x)=\sqrt{\frac{2x}{\pi}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+)!\cdot(4k+3)}. \tag{15}$$

У даній роботі для виконання розрахунків прийняті наступні співвідношення:

$$C(x)=0,79888\sqrt{x}\cdot\sum_{k=0}^{3}a_k x^{2k};$$
$$S(x)=0,79888\sqrt{x}\cdot\sum_{k=0}^{3}b_k x^{2k+1}. \tag{16}$$

Значення коефіцієнтів a_k, b_k наведено в табл. 6.

Таблиця 6 – **Значення коефіцієнтів для визначення значень функцій** $C(x)$ і $S(x)$

Коефіцієнти a_k		Коефіцієнти b_k	
Значення індексу k	Значення коефіцієнтів	Значення індексу k	Значення коефіцієнтів
0	1	0	0,33333
1	-0,1	1	-0,02381
2	0,00463	2	0,00075
3	-0,00011	3	-1,32275·10–5

Обчислення значень інтегрального синуса і інтегрального косинуса. Визначення цих функцій та їх степеневе розкладання наведено в табл. 7.

Обчислення значень інтегрального гіперболічного синуса і інтегрального гіперболічного косинуса. Визначення цих функцій та їх степеневе розкладання наведено в табл. 8. Значення перших чотирьох коефіцієнтів степеневого розкладання цих функцій наведено в табл. 9 та 10.

Способи подання інтервальних чисел. Визначення інтервального числа надано в роботах [12,16]. У роботах [12,14] описано дії з інтервальними числами в класичній формі.

Таблиця 7 – **Степеневе розкладання інтегрального синуса і інтегрального косинуса**

Найменування функції	Визначення функції	Степеневе розкладання
Інтегральний синус	$Si(x)=\int\limits_0^x \frac{\sin t}{t}dt$	$Si(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)\cdot(2k+1)!}$
Інтегральний косинус	$Ci(x)=\int\limits_0^x \frac{\cos t}{t}dt$	$Ci(x)=C+\ln x+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k x^{2k}}{2k\cdot(2k)!}$

Таблиця 8 – **Степеневе розкладання інтегрального гіперболічного синуса і інтегрального гіперболічного косинуса**

Найменування функції	Визначення функції	Степеневе розкладання
Інтегральний гіперболічний синус	$Shi(x)=\int\limits_0^x \frac{\sinh t}{t}dt$	$Shi(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)\cdot(2k+1)!}$
Інтегральний гіперболічний косинус	$Chi(x)=\int\limits_0^x \frac{\cosh t}{t}dt$	$Chi(x)=C+\ln x+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{x^{2k}}{2k\cdot(2k)!}$

Таблиця 9 - **Значення коефіцієнтів степеневого розкладання інтегрального синусу і інтегрального косинусу**

Значення індексу k	Значення коефіцієнтів степеневого розкладання інтегрального синусу, $(-1)^k[(2k+1)\cdot(2k+1)!]^{-1}$	Значення коефіцієнтів степеневого розкладання інтегрального косинусу, $(-1)^k[2k\cdot(2k)!]^{-1}$
1	-0,05555	-0,25
2	0,00166	0,01041
3	$2{,}83446\cdot10^{-6}$	-0,00041
4	-	$3\cdot10^{-6}$

Таблиця 10 – **Значення коефіцієнтів степеневого розкладання інтегрального гіперболічного синусу і інтегрального гіперболічного косинусу**

Значення індексу k	Значення коефіцієнтів степеневого розкладання інтегрального синусу $[(2k+1)\cdot(2k+1)!]^{-1}$	Значення коефіцієнтів степеневого розкладання інтегрального косинусу $[2k\cdot(2k)!]^{-1}$
1	0,05555	0,25
2	0,00166	0,01041
3	$2{,}83446\cdot10^{-6}$	0,00041
4	-	$3\cdot10^{-6}$

У роботі [15] описано дії з інтервальними числами представленими в ЦЕНТР - РАДІУС, в роботі [16] викладено властивості інтервальних чисел в гіперболічній формі. В роботі [7] наведено відомості щодо спеціалізованого програмного калькулятора, який використовує інтервальні числа в системі ЦЕНТР - РАДІУС. У роботі [10] надано опис програмного продукту, який використовує представлення інтервальних чисел в нестандартній формі. Особливості цього способу наведено в роботі [13]. Використання інтервальних чисел для розв'язання інженерних задач наведено в роботі [21].

В класичній формі інтервальне число $[A]$ визначають на множині дійсних чисел R у вигляді замкнутого інтервалу. Згідно з цією роботою визначимо інтервальне число А у вигляді замкнутого інтервалу:

$$[A]=(a_1,a_2)\,,\quad a_1\le a_2\,. \tag{17}$$

Якщо $a_1=a_2$ таке інтервальне число називають виродженим. Приклад виродженого інтервального числа – стала величина. У роботі [15] описаний спосіб представлення інтервальних чисел в системі ЦЕНТР - РАДІУС. У цій системі інтервальне число $\langle A\rangle$ має наступний вигляд:

$$A=\langle a,r_a\ \rangle\,, \tag{18}$$

де

$$a=\frac{a_1+a_2}{2}\,,\ r_a=\frac{a_2-a_1}{2}\,. \tag{19}$$

В [16] запропонована гіперболічна форма представлення інтервального числа. У цій роботі запропоновано інтервальне число x записувати у вигляді:

$$x = \rho(ch\phi + \theta \cdot sh\phi) . \qquad (20)$$

У співвідношенні (20) прийнято, що θ – спеціальний символ. За умовчанням вважають, що $\theta^2 = 1$. Модулем гіперболічного інтервального числа називають величину:

$$\mu(x) = a^2 - r_a^2 . \qquad (21)$$

В даній роботі прийнято, що $r_a < |a|$. Величину ρ називають гіпермодулем, величину ϕ - аргументом гіперболічного інтервального числа. Величини ρ і ϕ визначають за співвідношеннями:

$$\rho = \sqrt{\mu(x)} , \ \phi = \frac{1}{2}\ln\frac{a + r_a}{a - r_a} = \frac{1}{2}\ln\frac{a_2}{a_1} . \qquad (22)$$

Використовуючи співвідношення (18) і (19) отримаємо:

$$\mu(x) = \left(\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_1 - a_2}{2}\right)^2 = a_1 a_2 . \qquad (23)$$

Отже, інтервальне число x можна визначити як $x = f(\rho, \phi)$. Зв'язки між різними формами подання інтервальних чисел, які розглянуті в даній роботі, наведено в табл. 11.

Розглянемо чисельний приклад: перейти від інтервального числа в класичній формі $[A] = (a_1, a_2) =$ = (7,11) до його подання в гіперболічній формі.

Таблиця 11 - **Зв'язки між різними формами представлення інтервальних чисел**

Форми подання інтервальних чисел	Форми подання інтервальних чисел		
	Класична, $[A] = (a_1, a_2)$	Система ЦЕНТР-РАДІУС, $\langle A\rangle = \langle a, r_a\rangle$	Гіперболічна, $x = f(\rho, \phi)$
Класична, $[A] = (a_1, a_2)$	$[A] = (a_1, a_2)$	[A]= $(a - r_a, a + r_a)$	$[A]$ =($\rho[ch\phi - sh\phi]$, $\rho[ch\phi + sh\phi]$)
Система ЦЕНТР-РАДІУС, $\langle A\rangle = \langle a, r_a\rangle$	$\langle A\rangle = \left\langle \frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_2 - a_1}{2} \right\rangle$	$\langle A\rangle = \langle a, r_a\rangle$	$\langle A\rangle = \langle \rho \cdot ch\phi, \rho \cdot sh\phi\rangle$
Гіперболічна, $x = f(\rho, \phi)$	$[A] = \left(\sqrt{a_1 a_2}ch(\phi), \sqrt{a_1 a_2}sh(\phi)\right)$ $\phi = \ln(a_2/a_1)/2$	$\langle A\rangle = \sqrt{a^2 - r_a^2} \cdot (ch\phi + \theta \cdot ch\phi)$ $\phi = \ln((a + r_a)/(a - r_a))/2$	$x = \rho(ch\phi + \theta \cdot sh\phi)$

Послідовно використовуючи вирази (23), (22) отримаємо:

$$\rho = \sqrt{7 \cdot 11} = 8,77496 \ \rightarrow$$

$$\phi = \frac{1}{2}\ln\frac{11}{7} = 0,22599 .$$

У гіперболічній формі це число прийме вигляд:

$$x = 8,77496 \cdot (ch(0,22599) + \theta \cdot sh(0,22599)) .$$

Представимо отримане число $[A]$ у формі числа, визначеного в системі ЦЕНТР –РАДИУС:

$$\langle A\rangle = \langle \rho \cdot ch\phi, \rho \cdot sh\phi\rangle =$$

$$= \left\langle \begin{matrix} 8,77496 \cdot ch(0,22599); \\ 8,77496 \cdot sh(0,22599) \end{matrix} \right\rangle = \langle 9, 2\rangle .$$

Отже, одержимо початкове число $[A]$ = (7,11).

Далі, для скорочення, будемо вживати термін «гіперболічне число» маючи на увазі під цим «інтервальне число, визначене в гіперболічній формі».

Постановка завдання. Розробка основних положень EXCEL – орієнтованих процедур для обчислення значень елементарних і спеціальних функцій з інтервальним аргументом, заданим в гіперболічній формі.

Отримані результати

Спираючись на результати роботи [16] та результати, отримані авторами операції додавання, віднімання, ділення і множення гіперболічних чисел слід виконувати наступним чином.

Операцію складання гіперболічних чисел:

$$x = \rho(ch\phi + \theta \cdot sh\phi) ;$$

$$y = \delta(ch\psi + \theta \cdot sh\psi)$$

слід виконувати за правилом:

$$x + y = (\rho \cdot ch\phi + \delta \cdot ch\psi) + \theta(\rho \cdot sh\phi + \delta \cdot sh\psi) . \qquad (24)$$

У роботі [16] показано, що для кожного гіперболічного числа вигляду $x = \rho(ch\phi + \theta \cdot sh\phi)$ існує протилежне число вигляду

$$-x = \rho((-ch\phi) + \theta \cdot (-sh\phi)) .$$

Таким чином, операцію віднімання гіперболічних чисел слід виконувати за правилом:

$$x - y = x + (-y) = \\ = (\rho \cdot ch\phi - \delta \cdot ch\psi) + \theta(\rho \cdot sh\phi - \delta \cdot sh\psi). \qquad (25)$$

Операцію множення двох гіперболічних чисел слід виконувати таким чином.

$$x \cdot y = \rho(ch\phi + \theta \cdot sh\phi) \cdot \delta(ch\psi + \theta \cdot sh\psi). \quad (26)$$

Розкриваючи у виразі (26) дужки і використовуючи формули [20, С.18], отримаємо, що:

$$\begin{aligned} x \cdot y &= \\ &= \rho(ch\phi + \theta \cdot sh\phi) \cdot \delta(ch\psi + \theta \cdot sh\psi) = \\ &= \rho\delta((ch(\phi+\psi) + \theta \cdot sh(\phi+\psi)). \end{aligned} \quad (27)$$

У роботі $[16]$ показано, що для кожного гіперболічного числа

$$x = \rho(ch\phi + \theta \cdot sh\phi)$$

існує обернене число:

$$\begin{aligned} x^{-1} &= (\rho(ch\phi + \theta \cdot sh\phi))^{-1} = \\ &= \frac{1}{\rho}(ch(-\phi) + \theta \cdot sh(-\phi)). \end{aligned} \quad (28)$$

Отже, операцію ділення двох гіперболічних чисел, використовуючи вирази (27), (28) необхідно виконувати таким чином:

$$\begin{aligned} \frac{x}{y} &= \rho(ch\phi + \theta \cdot sh\phi) \cdot \frac{1}{\delta}(ch(-\psi) + sh(-\psi) = \\ &= \frac{\rho}{\delta}(ch(\phi-\psi) + \theta \cdot (sh(\phi-\psi)). \end{aligned} \quad (29)$$

У роботі [22, С.215] приведений такий вираз:

$$(ch\phi \pm sh\phi)^n = ch(n\phi) \pm sh(n\phi). \quad (30)$$

Отже отримаємо:

$$x^n = (\rho(ch\phi + \theta \cdot sh\phi))^n = \rho^n(ch(n\phi) + \theta \cdot sh(n\phi)). \quad (31)$$

Розглянемо сталу величину *C*. У формі класичного інтервального числа величина [C] = (c_1, c_1). Відповідно до (20…22) отримаємо:

$$\rho = \sqrt{c^2} = c, \quad \phi = \frac{1}{2}\ln\frac{c}{c} = 0. \quad (32)$$

Для додавання (віднімання) сталої величини c і гіперболічного числа x за співвідношенням: (24), (25), отримаємо:

$$\begin{aligned} c \pm x &= c(ch(0) + \theta \cdot sh(0)) \pm \rho(ch\phi + \theta \cdot sh\phi) = \\ &= (c \pm \rho \cdot ch\phi) \pm \theta \cdot sh(\phi). \end{aligned} \quad (33)$$

Для множення сталої величини c на гіперболічне число x за співвідношенням (27) отримаємо:

$$\begin{aligned} cx &= c(ch(0) + \theta \cdot sh(0)) \cdot \rho(ch\phi + \theta \cdot sh\phi) = \\ &= c\rho \cdot (ch(0+\phi) + \theta \cdot sh(0+\phi)) = \\ &= c\rho(ch\phi + \theta \cdot sh\phi). \end{aligned} \quad (34)$$

Для операції ділення розглянемо два варіанти операції. У першому варіанту, за співвідношенням (29) отримаємо:

$$\begin{aligned} \frac{x}{c} &= \frac{\rho(ch\phi + \theta \cdot ch\phi}{c \cdot (ch \cdot (0) + \theta \cdot sh(0))} = \\ &= \frac{\rho}{c}\left(ch(\phi - 0\right) + \theta \cdot sh(\phi - 0)) = \frac{\rho}{c}(ch\phi + \theta \cdot sh\phi). \end{aligned} \quad (35)$$

У другому варіанті, за співвідношенням (26) маємо:

$$\begin{aligned} \frac{c}{x} &= \frac{c \cdot (ch(0) + \theta \cdot sh(0)}{\rho(ch\phi + \theta \cdot sh\phi)} = \\ &= \frac{c}{\rho}(ch(0-\phi) + \theta \cdot sh(0-\phi)). \end{aligned} \quad (36)$$

Зважаючи на те, що $ch\phi$ функція парна, а $sh\phi$ непарна, отримаємо:

$$\frac{c}{x} = \frac{c}{\rho}\left(ch(-\phi) + \theta \cdot sh(-\phi)\right) = \frac{c}{\rho}(ch\phi - \theta \cdot sh\phi). \quad (37)$$

Порівняння деяких форм подання інтервальних чисел між собою автори частково виконали в роботах [7, 23]. У цих роботах автори порівнювали результати обчислення, в яких інтервальні числа було представлено в класичній формі, нестандартній і в системі ЦЕНТР-РАДІУС. Порівняння цих способів подання інтервальних чисел із запропонованим в даному повідомленні способом дозволяє зробити висновок про те, що визначення інтервального числа в гіперболічній формі має переваги у порівнянні з вищевказаними способами. Подання інтервального числа в гіперболічній формі спрощує програмування операцій множення, ділення і піднесення до цілочисельного степеня. Особливо ці переваги виявляються при дії з інтервальними числами, межі інтервалів яких розташовані по різну сторону від початку числової осі

У роботі [7] проведена оцінка точності результатів обчислення значень основних елементарних функцій і деяких спеціальних функцій. У табл. 11 наведені результати обчислення значень інтегрального косинуса, інтегральній показовій функції і три гамма-функції.

Таблиця 11. **Табличні і інтервальні значення інтегрального синусу інтегральної показникової функції та тригамма - функції**

Вид функції та значення її аргументу	Табличне значення функції	Значення інтервального аргументу	Інтервальне значення функції
$Si(0.54)$	0.53132	(0,53; 0,55)	(0,51911;0,54454)
$Ei(0,61)$	0,59752	(0,6; 062)	(0,58614: 0,60691)
$\psi'(1,045)$	0,97594	(1,040; 1,050)	(0,97615; 0,97280)

Порівнюючи табличні значення функцій, отриманих при використанні вироджених аргументів з їх значеннями, наведеними в роботі [2] і отриманими при використанні аргументів, що визначені в інтервальному вигляді, можна зробити висновок про те, що застосування інтервальних обчислень дозволяє набувати не тільки значень функцій з достатньою для практичного застосування точністю, але і одночасно оцінювати похибку отриманих результатів обчислень. Остання обставина, на думку авторів даного повідомлення, робить їх застосування доцільним в тих випадках, коли аргументи функцій отримують в результаті експериментальних спостережень

Реалізація запропонованих у даній роботі обчислювальних методів виконана на мові програмування VBA (Visual Basic for Applications) в середовищі MS Excel 2017 з розробкою макросів для розв'язання відповідних завдань.. Обчислення можна виконувати у трьох варіантах.

Перший варіант використовує класичну інтервальну математику [12,14].

Другий варіант використовує інтервальну математику, в якій інтервали представлено в системі ЦЕНТР – РАДІУС [7,15].

Третій варіант використовує інтервальні числа в гіперболічній формі.

Для виконання унарних операцій, які вбудовано в систему EXCEL, рекомендовано використовувати класичну інтервальну математику. Для виконання бінарних операцій рекомендовано використовувати інтервальні числа в гіперболічній формі.

Висновки

1. Запропоновано основні положення EXCEL – орієнтованих процедур для обчислення значень елементарних і спеціальних функцій з інтервальним аргументом, заданим в гіперболічній формі.

2. Розглянуто способи подання інтервальних чисел в гіперболічній формі і правила виконання операцій додавання, віднімання та множення цих чисел.

3. Отримано правило виконання операції ділення цих чисел.

4. Описано процедури визначення значень числами: прямих і обернених функцій прямолінійної тригонометрії, прямих і обернених функцій гіперболічної тригонометрії, експоненціальної, довільної показникової і степеневої функції, Псі- функції, тригамма – функції, тетрагамма – функції, пентагамма – функції, Бета – функції і її частинних похідних, інтегральної показникової функції, інтегрального логарифма, ділогарифма, інтегралів Френеля, інтегрального синуса, інтегрального косинуса, інтегрального гіперболічного синуса, інтегрального гіперболічного косинуса.

5. Наведено чисельні приклади, що ілюструють запропоновані методи і виконаний аналіз їх точності.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Carlson B., Goldstein M. Rational approximation of functions. Los Alamos Scientific Laboratory LA-1943, 1955.
2. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Под ред. М. Абрамовица и И. Стигана. Москва: Наука, 1979. 832 с.
3. Люстерник Л.А., Червоненкис О.А., Янпольский А.Р. Математический анализ: Вычисление элементарных функций. Москва, 1963. 248 с.
4. Попов Б. А., Теслер Г.А. Вычисление функций на ЭВМ. Киев: Наукова думка, 1984. 599 с.
5. Кошаровский А.Н. Разработка и исследование алгоритмов и процессоров вычисления значений элементарных функций: дис. … канд. техн. наук: 05.13.05 / Москва, Московский энергетический институт, 2000. 179 с.
6. Сальников М.С. Рекурсивный алгоритм вычисления логарифма. *Информационные процессы*. 2012. № 3, Т. 12. С. 248-252.
7. Дубницкий В. Ю., Кобылин А. М., Кобылин О. А. Вычисление значений элементарных и специальных функций с интервально заданным аргументом, определённым в системе ЦЕНТР – РАДИУС. *Прикладная радиоэлектроника*. 2017. №3, 4. Том 16. С. 147-154.
8. Кулямин В. Формальные подходы к тестированию математических функций. *Труды института системного программирования*. 2006. Вып. 10. С. 69-114.
9. Чернов Е.С, Кулямин В.В.. Тестирование современных библиотек тригонометрических функций. *Труды Института системного программирования РАН*. Том 14, часть 1, 2008. С. 161-178.
10. Буряченко С. П. Программный комплекс для работы с интервальными числами. *Державинский форум.* 2019. Т. 3. № 10. С. 161-167.
11. Малашонок Г.И. Руководство по языку «MATHPAR». Тамбов: Издательский дом Тамбовского Государственного Университета им. Г.Р. Державина, 2013. 132 с.
12. Алефельд Г. Введение в интервальные вычисления. Москва: Мир. 1987. 360 с.
13. Калмыков С. А., Шокин Ю. И., Юлдашев 3. X. Методы интервального анализа. Новосибирск: Наука. 1986. 223 с.
14. Шарый С.П. Конечномерный интервальный анализ. Новосибирск: Издательство «XYZ», 2012. 606 с.
15. Жуковська, О.А. Основи інтервального аналізу: навчальний посібник. Київ: Освіта України, 2009. 136 с.
16. Молодцов, Д.А. и Ковков, Д.В. Введение в теорию приближенных чисел. *Вестник Тверского Государственного Университета. Серия: Прикладная математика*. 2011. 23. С. 111-128.
17. Цимринг Ш. Е. Специальные функции и определенные интегралы. Алгоритмы. Программы для микрокалькуляторов: Справочник. Москва: Радио и связь. 1988. 272 с.
18. Бейтмен Р., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. Москва: НАУКА, 1974. 296 с.
19. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. Формулы, графики, таблицы. Москва: НАУКА, 1964. 344 с.
20. Янпольский А.Р. Гиперболические функции. Москва: НАУКА, 1960. 195 с.
21. Дубницкий В.Ю., Кобылин А.М., Кобылин О.А. Вычисление индикаторов подобия и численное интегрирование критериев подобия интервально определённых в системе ЦЕНТР-РАДИУС. *Сучасні інформаційні системи,* 2019. Т.3, №3. С. 55 – 62. doi: https://doi.org/10.20998/2522-9052.2019.3.07

22. Бронштейн Н.И. Семендяев, К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗОВ. Под ред Г.Гроше и В. Циглера. Наука, 1981. 718 с.
23. Дубницький В.Ю., Кобилін А.М., .Кобилін О.А. Виконання на мобільних пристроях арифметичних операцій з використанням аксіом класичного та нестандартного інтервального аналізу. *Сучасні інформаційні системи*. 2021. Т. 5, № 3. С. 128-136. doi: https://doi.org/10.20998/2522-9052.2021.3.17

Received (Надійшла) 22.09.2021
Accepted for publication (Прийнята до друку) 10.11.2021

ABOUT THE AUTHORS / ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Дубницький Валерій Юрійович – кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, старший науковий співробітник ННІ "Каразінський банківський інститут" ХНУ ім. В.Н. Каразіна, Харків, Україна;
Valeriy Dubnitskiy – Candidate of Technical Sciences, Senior Research, Senior Research of "Karazin Banking Institute" of V.N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine;
e-mail: dubnitskiy@gmail.com; ORCID ID: http://orcid.org/0000-0003-1924-4104.

Кобилін Анатолій Михайлович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри інформаційних технологій та математичного моделювання, ННІ "Каразінський банківський інститут" ХНУ ім. В.Н. Каразіна, Харків, Україна;
Anatolii Kobylin – Candidate of Technical Sciences, Associate professor, Associate professor of "Karazin Banking Institute" of V.N. Karazin Kharkiv National University, Kharkiv, Ukraine;
e-mail: anatoliy_kam@ukr.net; ORCID ID: http://orcid.org/0000-0002-8083-0762.

Кобилін Олег Анатолійович – кандидат технічних наук, доцент, завідувач кафедри інформатики, Харківський національний університет радіоелектроніки, Харків, Україна;
Oleg Kobylin – Candidate of Technical Sciences, Associate professor, Head of the Department of Informatics, Kharkiv National University of RadioElectronics, Kharkiv, Ukraine;
e-mail: oleg.kobylin@gmail.com; ORCID ID: http://orcid.org/0000-0003-0834-0475.

Кушнерук Юрій Іонович – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри Харківського національного університету Повітряних Сил імені Івана Кожедуба, Харків, Україна;
Yuriy Kushneruk – Candidate of Technical Sciences Associate Professor, Senior Lecturer of Ivan Kozhedub ,Kharkiv National Air Force University,Kharkiv, Ukraine
e-mail: yuriy kushneruk@gmail.com; ORCID ID: http://orcid.org/0000-0001-5844-7137.

EXCEL – ориентированная процедура для вычисления значений специальных функций с интервальным аргументом, заданным в гиперболической форме

В. Ю. Дубницкий, А. М. Кобилин, О. А. Кобилин, Ю. И. Кушнерук

Аннотация. Цель работы. Предложить основные положения EXCEL – ориентированных процедур для вычисления значений элементарных и специальных функций с интервальным аргументом, заданным в гиперболической форме. **Результаты работы.** Рассмотрены способы представления интервальных чисел в гиперболической форме и правила выполнение операций сложения, вычитания, умножения и деления этих чисел. Описаны процедуры определения числовых значений функций, аргументы которых могут быть вырожденными и интервальными числами, а именно: прямых и обратных функций прямолинейной тригонометрии, прямых и обратных функций гиперболической тригонометрии, экспоненциальной, функции, произвольной показательной функции и степенной функции, Гамма- функции, неполной Гамма – функции, дигамма–функції, тригамма – функции, тетрагамма– функции, пентагамма – функции, Бета – функции и ее частных производных, интегральной показательной функции, интегрального логарифма, дилогарифма, интегралов Френеля, интегрального синуса, интегрального косинуса, интегрального гиперболического синуса, интегрального гиперболического косинуса. Предложены основные положения EXCEL – ориентированных процедур для вычисления значений элементарных и специальных функций с интервальным аргументом, заданным в гиперболической форме Приведены численные примеры, которые иллюстрируют использование предложенных методов

Ключевые слова: интервальная арифметика; гиперболическая форма интервального числа; специальные функции; численные методы.

EXCEL-orientated procedure for calculating the values of special functions with interval argument assigned on the hyperbolic form

Valeriy Dubnitskiy, Anatolii Kobylin, Oleg Kobylin, Yuriy Kushneruk

Abstract. Aim of the work is to propose the main terms of the EXCEL-orientated procedures for calculating the values of elementary and special functions with interval argument that is assigned on the hyperbolic form. **The results of the work.** The methods of presenting the interval values in the hyperbolic form and the rules of addition, subtraction, multiplication, and division of this values were considered. The procedures of calculating the function values, whose arguments can be degenerate or interval values were described. Namely, the direct and the reverse functions of the linear trigonometry, the direct and the reverse functions of the hyperbolic trigonometry, exponential function, arbitrary exponential function and power function, Gamma-function, incomplete Gamma-function, digamma-function, trigamma-function, tetragamma-function, pentagamma-function, Beta-function and its partial derivatives, integral exponential function, integral logarithm, dilogarithm, Frenel integrals, sine integral, cosine integral, hyperbolic sine integral, hyperbolic cosine integral. The basic terms of the EXCEL-orientated procedures for calculating the values of elementary and special functions with interval argument that is assigned on the hyperbolic form were proposed. The numerical examples were provided, that illustrate the application of the proposed methods.

Keywords: interval arithmetic; hyperbolic form of the interval value; special functions; numerical methods.